

№



С.В.Подлесний, В.Г.Федорченко,  
О.Г.Водолазська,  
В.М.Іскрицький, О.М.Стадник

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ**  
**З АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія

С.В.Подлесний, В.Г.Федорченко, О.Г.Водолазська,  
В.М.Іскрицький, О.М.Стадник

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ**  
**З АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів вищих технічних учбових закладів

Краматорськ 2004

ББК 22.21

УДК 531

Р 64

Рецензенти:

Ропай В.А., д.т.н., проф. Дніпропетровського національного гірничного університету, м. Дніпропетровськ

Ю.М. Внуков, д.т.н., проф. Запорізького національного технічного університету, м. Запоріжжя

Гриф надано Міністерством освіти і науки України

Лист № 14/18.2 – 1350 від 17.06.2004

Р64 Розв'язання задач з аналітичної механіки: Навч. посібник/ С.В. Подлесний, В.Г. Федорченко, О.Г. Водолазська, В.М. Іскрицький, О.М. Стадник. – Краматорськ: ДДМА, 2004. –220 с.

ISBN 5–7763–1294–9

Навчальний посібник містить короткі відомості з теорії, різноманітні приклади рішення задач і 30 варіантів завдань для самостійної роботи за кожною темою.

Посібник розрахований як на викладачів, так і на студентів.

ББК 22.21

© С.В. Подлесний,  
В.Г. Федорченко,  
О.Г.Водолазська,  
В.М. Іскрицький,  
О.М. Стадник, 2004

ISBN 5–7763–1294–9

© ДДМА, 2004

## Зміст

Вступ.....	4
1 Принцип Даламбера.....	5
1.1 Застосування принципу Даламбера при дослідженні механічного руху матеріальних об'єктів.....	5
1.2 Визначення динамічних реакцій при обертанні тіла навколо нерухомої осі.....	13
2 Принцип можливих переміщень.....	34
3 Загальне рівняння динаміки.....	61
4 Рівняння Лагранжа.....	78
5 Дослідження малих коливань механічних систем.....	112
6 Аналогії при використанні рівняння Лагранжа.....	157
7 Принцип Гамільтона.....	168
8 Індивідуальні завдання.....	180
8.1 Принцип Даламбера.....	180
8.2 Принцип можливих переміщень.....	190
8.3 Загальне рівняння динаміки.....	200
8.4 Рівняння Лагранжа.....	210
Список використаної літератури.....	219

## ВСТУП

В аналітичній механіці вивчається рівновага і рух механічних систем за допомогою методів математичного аналізу. Значення аналітичної механіки в цілому ряді галузей сучасної техніки, таких як теорія управління рухом, космічна механіка, автоматичне управління та ін., в сучасну епоху незмінно зростає. Цім і визначається актуальність цього розділу.

Аналітична механіка заснована на двох принципах: принципі Даламбера і принципі можливих переміщень. Крім того вона вживає чітку класифікацію в'язей і поняття узагальнених координат, узагальнених сил, а також можливих переміщень. Із двох вищепозначених принципів завдяки їх синтезу заповначають загальне рівняння динаміки, або об'єднаний принцип Даламбера-Лагранжа, із якого послідовно витікають друге рівняння Лагранжа, канонічні рівняння, функція та принцип Гамільтона і багато інших методів вивчення рівноваги, а також руху механічних систем.

У роботі наведені методичні вказівки до вирішення задач розділу "Аналітична механіка", причому розв'язання задач наведено на прикладах виконання із застосуванням різноманітних прийомів.

Короткі теоретичні відомості забезпечують поєднання теорії з практичними діями при розв'язанні задач, що сприяє більш творчому їх розумінню.

Показано, що одна і та ж задача може бути розв'язана відповідно плану розв'язання у залежності від методу, який визначається вибором теорем, рівняння або принципу.

Проведений взаємозв'язок різних методів розв'язання задач і обґрунтований вибір найбільш раціональних методів у конкретних випадках.

У роботі приділено увагу аналогіям фізичного та математичного характеру. Це утворює передумови для найбільш глибокого розуміння студентом методики розв'язання різноманітних задач динаміки.

Розглянуті розділи теоретичної механіки закінчуються короткими задачами для самостійних робіт, що дає змогу за малий час визначити необхідні знання і вміння студентів щодо розв'язання різноманітних задач класичної механіки.

# 1 ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

## 1.1 Застосування принципу Даламбера при дослідженні механічного руху матеріальних об'єктів

Принцип Даламбера витікає з основного рівняння динаміки для не-свободної матеріальної точки.

Запишемо основне рівняння руху точки масою  $m$  відносно інерціальної системи відліку під дією прикладених активних сил і реакцій в'язей:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}, \quad (1.1)$$

де  $\bar{F}$  – рівнодіюча активних сил;

$\bar{R}$  – рівнодіюча реакцій в'язей;

$\bar{a}$  – прискорення точки.

Перепишемо рівняння (1.1):

$$\bar{F} + \bar{R} - m\bar{a} = 0 \quad (1.2)$$

і введемо позначення:  $-m\bar{a} = \bar{\Phi}$ .

Силу  $\bar{\Phi}$  називають Даламберовою силою інерції, а отримане рівняння

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0 \quad (1.3)$$

принципом Даламбера матеріальної точки.

Завдяки рівнянню (1.3) отримують принцип Даламбера для механічної системи:

$$\sum \bar{F}_i + \sum \bar{R}_i + \sum \bar{\Phi}_i = 0, \quad (1.4)$$

де  $\sum \bar{F}_i$  – головний вектор всіх активних сил, діючих на систему;

$\sum \bar{R}_i$  – головний вектор сил реакцій в'язей;

$\sum \bar{\Phi}_i$  – головний вектор всіх сил інерції, прикладених до механічної системи.

Як видно з рівняння (1.4), всі указані сили утворюють урівноважену систему сил, звідки справедливо також рівняння:

$$\sum \bar{M}_0(\bar{F}_i) + \sum \bar{M}_0(\bar{R}_i) + \sum \bar{M}_0(\bar{\Phi}_i) = 0. \quad (1.5)$$

Отримані рівняння (1.4) і (1.5) дають змогу вирішувати задачі динаміки методами статички і визначати як кінематичні параметри руху тіл механічної системи, так і реакції в'язей, накладених на систему.

Визначення сил інерції і їх моментів залежить від характеру руху тіл, які входять до системи.

При поступовому русі тіла сила інерції відповідає формулі

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}_c, \quad (1.6)$$

де  $\bar{\Phi}$  – сила інерції;

$m$  – маса тіла;

$\bar{a}_c$  – прискорення центра мас тіла.

При обертальному рухові тіла навколо нерухомої осі

$$M_z^\Phi = -I_z \varepsilon, \quad (1.7)$$

де  $M_z^\Phi$  – момент сил інерції тіла відносно нерухомої осі;

$I_z$  – момент інерції відносно нерухомої осі обертання;

$\varepsilon$  – кутове прискорення тіла відносно нерухомої осі обертання.

При плоско-паралельному русі тіла до нього прикладається головний вектор сили інерції відповідно до формули

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}_c,$$

а також головний момент сили інерції відповідно до осі, яка проходить через його центр мас перпендикулярно площині, відносно якої здійснюють рух точки тіла:

$$M_{cz}^{\Phi} = -I_{cz}\varepsilon,$$

де  $M_{cz}^{\Phi}$  – момент сил інерції відносно осі  $Cz$ , яка проходить через центр мас тіла перпендикулярно площині, відносно якої здійснюють рух точки тіла;

$I_{cz}$  – момент інерції тіла відносно осі  $Cz$ ;

$\varepsilon$  – прискорення тіла відносно цієї осі.

**Розглянемо приклади.**

### **Приклад 1.1**

Вантаж 1 вагою  $\bar{P}_1$  опускається вниз вздовж грані призми вагою  $\bar{P}$  і надає руху вантажу 2 вагою  $\bar{P}_2$  за допомогою нитки, перекинutoї через невагомий блок 3. Підлога, грані призми і грузів гладенькі.

Визначити тиск призми на підлогу і виступ, який не дає переміщатися призмі, а також натяг нитки.

### **Рішення**

Застосуємо до системи (рис. 1.1) принцип Даламбера відповідно до рівняння (1.4). Напрямок прискорень вантажів вибираємо довільно. Прикладаємо до системи згідно з принципом Даламбера всі сили, що входять до рівняння (1.4).



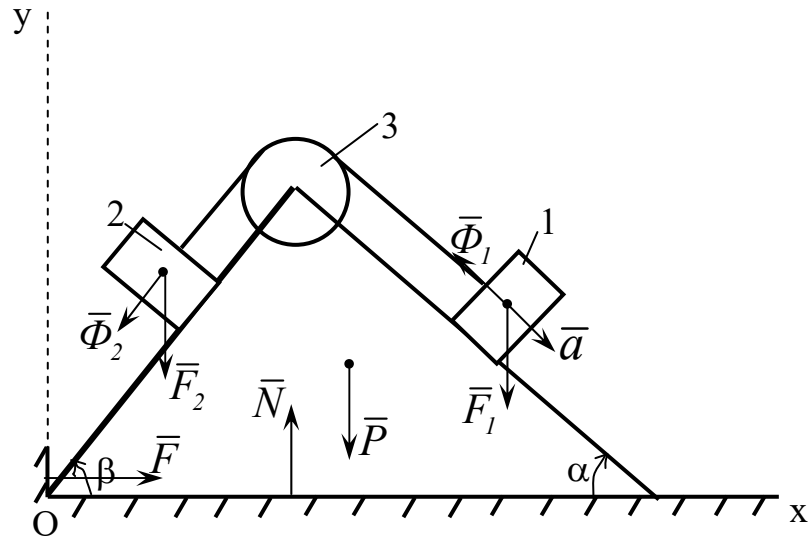


Рисунок 1.1

Для абсолютних значень сил інерції вантажів будемо мати:

$$\Phi_1 = \frac{P_1}{g} a; \quad \Phi_2 = \frac{P_2}{g} a. \quad (1.8)$$

Напрямок сил інерції  $\bar{\Phi}_1$  і  $\bar{\Phi}_2$  показано на рисунку 1.1 ( $\bar{\Phi}_1$  і  $\bar{\Phi}_2$  спрямовують протилежно прискоренню  $\bar{a}$ ).

Складемо умови рівноваги зовнішніх сил  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}, \bar{N}, \bar{F}$  і сил інерції  $\bar{\Phi}_1$  і  $\bar{\Phi}_2$  в проекціях на координатні осі  $Ox$  і  $Oy$ , отримаємо відповідно:

– для осі  $Ox$  –

$$F - \frac{P_1}{g} a \cdot \cos \alpha - \frac{P_2}{g} a \cdot \cos \beta = 0;$$

– для осі  $Oy$  –

$$N - P_1 - P_2 - P + \frac{P_1}{g} a \cdot \sin \alpha - \frac{P_2}{g} a \cdot \sin \beta = 0.$$

Звідси

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{a}{g}(P_1 \cos \alpha + P_2 \cos \beta); \\ N &= P_1 + P_2 + P - \frac{a}{g}(P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta). \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Для визначення сили натягу нитки  $\bar{T}$  і прискорення вантажів застосуємо принцип Даламбера, для цього складемо умови рівноваги зовнішніх сил і сил інерції в проекціях на напрямок нитки для кожного вантажу окремо. Отримаємо:

– для вантажу 1 (рис. 1.2) –

$$T + \frac{P_1}{g}a - P_1 \sin \alpha = 0, \quad (1.10)$$

– для вантажу 2 (рис. 1.3) –

$$T - \frac{P_2}{g}a - P_2 \sin \beta = 0. \quad (1.11)$$

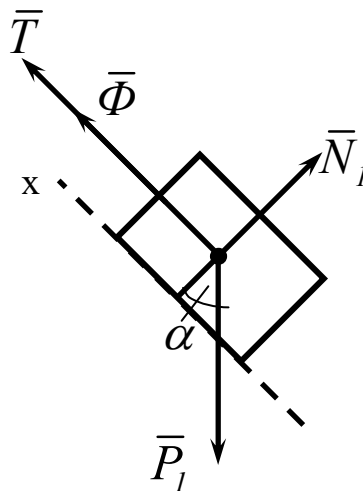


Рисунок 1.2

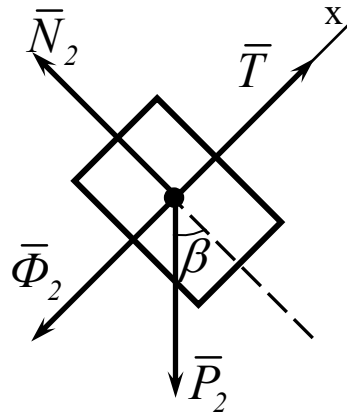


Рисунок 1.3

З рівнянь (1.10) і (1.11) знаходимо прискорення  $a$  :

$$a = g \frac{P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta}{P_1 + P_2}. \quad (1.12)$$

Зрозуміло, що для того щоб вантаж рухався вниз, повинна виконуватись умова

$$P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta > 0.$$

Використовуючи значення (1.12), з рівнянь (1.10) і (1.11) знаходимо натяг нитки:

$$T = \frac{P_1 P_2 (\sin \alpha + \sin \beta)}{P_1 + P_2}. \quad (1.13)$$

Підставивши значення  $a$  із формули (1.12) в рівняння (1.9), послідовно отримаємо:

$$F = \frac{(P_1 \cos \alpha + P_2 \cos \beta)(P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta)}{P_1 + P_2}; \quad (1.14)$$

$$N = P_1 + P_2 + P - \frac{(P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta)^2}{P_1 + P_2}. \quad (1.15)$$

Аналіз рівнянь (1.14) і (1.15) свідчить, що у випадку

$$P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta = 0$$

тиск призми на виступ буде відсутнім, а її тиск на підлогу буде дорівнювати силам ваги призми і вантажів.

Отримані результати (1.12), (1.13), (1.14), (1.15) дають змогу також аналізувати поведінку механічної системи при змінних кутах  $\alpha$  і  $\beta$ . Наприклад, при кутах  $\alpha$  або  $\beta$ , які будуть дорівнювати  $90^\circ$ , призма стає прямокутною, що значно змінює поведінку механічної системи в цілому.

Із наведеного прикладу видно, що принцип Даламбера дає змогу визначати не тільки реакції в'язей накладених на механічну систему, а і визначати кінематичні характеристики руху окремих її тіл.

### Приклад 1.2

Електродвигун, встановлений на горизонтальній балці, піднімає за допомогою троса вантаж маси  $m$ . Радіус барабана, укріпленого на осі двигуна, дорівнює  $r$ , а момент інерції барабана разом з ротором дорівнює  $I$ . Нехтуючи вагою троса, визначити динамічні реакції опор  $A$  і  $B$  балки, якщо вантаж піднімається з прискоренням  $\bar{a}$ . Лінійні розміри зазначені на рисунку 1.4. Передбачається, що площина рисунка є площиною матеріальної симетрії частин, що рухаються.

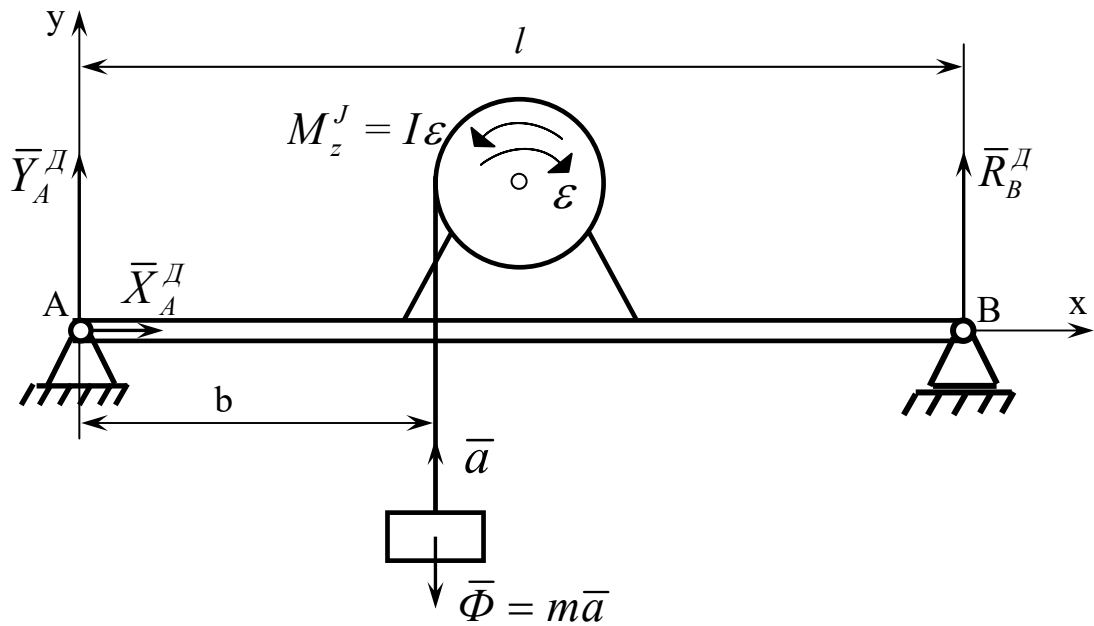


Рисунок 1.4

### Рішення

Вантаж піднімається з прискоренням  $\bar{a}$ . Його сила інерції, яка за модулем дорівнює  $m\bar{a}$ , спрямована вниз. Кутове прискорення частин, які обертаються, спрямовані за годинниковою стрілкою, отже, головний момент сил інерції спрямований проти ходу годинникової стрілки і дорівнює за модулем  $I\epsilon$  (на рисунку 1.4 знак мінус у сили інерції вантажу й у моменту сил інерції барабана не показаний, тому що їхні напрямки зазначені на рисунку). Головний вектор сил інерції барабана дорівнює нулю, тому що його центр мас нерухомий. Зобразимо динамічні реакції опор. Активні сили не враховуємо і, вважаючи умовно барабан і вантаж нерухомими, складаємо рівняння рівноваги для сил інерції і додаткових динамічних реакцій. Складемо два рівняння моментів (головний момент сил інерції можна розглядати як момент деякої пари) і одне рівняння проєкцій сил на ось  $X$ . Маємо:

$$\begin{aligned}
\sum M_{iA} &= 0, & I\varepsilon + R_B^D b - mab &= 0, \\
\sum M_{iB} &= 0, & I\varepsilon - Y_A^D b + ma(l-b) &= 0, \\
\sum F_{ix} &= 0, & X_A^D &= 0.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

З огляду на те, що  $\varepsilon = a/r$ , знайдемо:

$$X_A^D = 0, \quad Y_A^D = \left[ \frac{I}{r} + m(l-b) \right] \frac{a}{l}, \quad R_B^D = \left( mb - \frac{I}{r} \right) \frac{a}{l}. \tag{1.17}$$

### 1.2 Визначення динамічних реакцій при обертанні тіла навколо нерухомої осі

Задача визначення динамічних реакцій в'язей при обертанні тіла навколо нерухомої осі досить актуальна особливо в тих випадках, коли тіло обертається з великими кутовими швидкостями, які означаються тисячами обертів за одну хвилину.

До таких тіл відносяться вали та колеса турбін, ротори гіроскопічних приладів, ротори двигунів, різноманітні маховики та ін.

Наведемо приклади розв'язування таких задач за допомогою принципу Даламбера.

#### Приклад 1.3

Однорідний тонкий стрижень  $AB$  вагою  $\bar{P}$  і довжиною  $l$  жорстко закріплений з вертикальним валом  $OO_1$  під кутом  $\alpha$  (рис. 1.5). Вал  $OO_1$  разом з стрижнем  $AB$  обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Визначити реакції жорсткого закріплення  $A$  стрижня.

#### Рішення

Використаємо до зовнішніх сил і сил інерції стрижня  $AB$  принцип

Даламбера в формі умов рівноваги відповідно до рівнянь (1.5), (1.6). Невідому реакцію  $\bar{R}_A$  і векторний момент жорсткого закріплення  $\bar{M}_A$  в точці  $A$  розкладемо вздовж осей координат.

Якщо розбити весь стрижень на елементарні частки однакової довжини, то прискорення середин цих ділянок розподіляється вздовж стрижня за лінійним законом (рис. 1.6), так як прискорення кожної точки стрижня –

$$a_i = r_i \omega^2,$$

де  $r_i$  – відстань  $i$ -ї точки до осі обертання.

Таким чином, сили інерції елементарних ділянок стрижня розподіленні теж за лінійним законом, створюючи трикутник.

Розподіленні таким чином паралельні сили мають рівнодіючу силу, лінія дії якої відстоїть від сторони трикутника на відстані  $l/3$  вздовж стрижня і  $2l/3$  від його вершини. Рівнодіюча сила  $\bar{\Phi}$  завжди дорівнює головному вектору розподілених по трикутнику сил. Для головного вектора сил інерції маємо:

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_c, \quad (1.18)$$

де  $\bar{a}_c$  – прискорення центра мас стрижня, тобто його середньої точки.

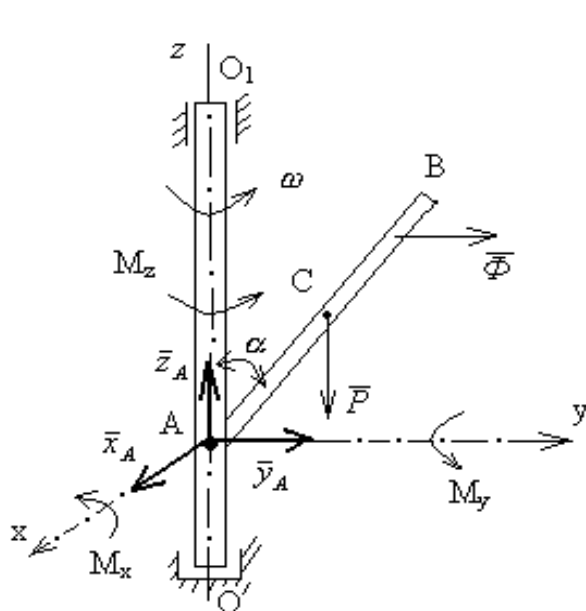


Рисунок 1.5

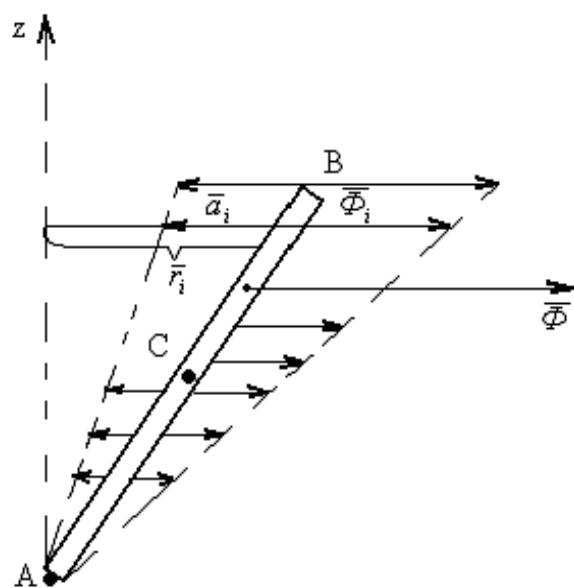


Рисунок 1.6

Таким чином,

$$\Phi = \frac{P}{g} a_c = \frac{P}{g} \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

Складемо шість умов рівноваги сил, припустивши, що стрижень в заданий момент часу знаходиться в координатній площині  $Ayz$ . Тоді відповідно до проєкцій сил і моментів їх відносно осей координат  $Ax$ ,  $Ay$ ,  $Az$  маємо:

$$\left. \begin{aligned} X_A &= 0; \\ Y_A + \Phi &= 0; \\ Z_A - P &= 0; \\ M_{Ax} - P \frac{l}{2} \sin \alpha - \Phi \frac{2}{3} l \cos \alpha &= 0; \\ M_{Ay} &= 0; \\ M_{Az} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Підставивши в рівняння (1.19) значення  $\overline{\Phi}$  із формули (1.18), отримаємо:



$$\left. \begin{aligned}
 X_A &= 0; \\
 Y_A &= -\frac{P}{g} \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha; \\
 Z_A &= P; \\
 M_{Ax} &= \frac{Pl}{2} \sin \alpha + \frac{P}{g} \times \frac{P^2}{3} \omega^2 \sin \alpha \times \cos \alpha = \\
 &\frac{Pl}{2} \left( \sin \alpha + \frac{l \omega^2}{3g} \sin 2\alpha \right); \\
 M_{Ay} &= 0; \\
 M_{Az} &= 0.
 \end{aligned} \right\} (1.20)$$

Із рівнянь (1.20) знаходимо реакції в жорсткому закріпленні (точка  $A$  на рис. 1.5):

$$\left. \begin{aligned}
 R_A &= \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = P \sqrt{1 + \frac{l^2 \omega^2}{4g^2} \sin^2 \alpha}; \\
 M_A &= \sqrt{M_{Ax}^2 + M_{Ay}^2 + M_{Az}^2} = \frac{Pl}{2} \left( \sin \alpha + \frac{P \omega^2}{3g} \sin 2\alpha \right).
 \end{aligned} \right\} (1.21)$$

Із отриманих рівнянь (1.21) можливо зробити висновок, що динамічні реакції значно збільшаться при зростанні кутової швидкості обертання і кута  $\alpha$ .

Якщо кут  $\alpha$  зменшити до нуля, то динамічні реакції зникають.

Цей висновок має велике значення, бо завдяки йому вирішується проблема балансування і центрування всіх машин і механізмів, які обертаються зі значною кутовою швидкістю оберту.

### Приклад 1.4

Вертикальний вал  $AK$ , який обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$ , закріплений підп'ятником у точці  $A$  і циліндричним підшипником в точці  $K$ . До вала жорстко прикріплений тонкий однорідний ламаний стрижень масою  $m = 10 \text{ кг}$ , що складається з частин 1 і 2 (розмір першої частини  $l_1 = 6b$ , другої –  $l_2 = 4b$ , де  $b = 0,1 \text{ м}$ , а їхні маси  $m_1$  і  $m_2$  пропорційні довжинам) і невагомий стрижень довжиною  $l = 4b$  з точечною масою  $m_3 = 3 \text{ кг}$  на кінці; обидва стрижні лежать в одній площині.

Підшипник знаходиться у точці  $K$  кріплення в точках: ламаного стрижня –  $B$ , невагомий стрижня –  $D$ .

$$AB = BD = DE = EK = a = 0,6 \text{ м}.$$

$$\text{Кути: } \alpha = 60^\circ, \beta = 240^\circ, \varphi = 45^\circ.$$

Визначити реакції підп'ятника і підшипника.

### Рішення

Визначимо маси і вагу частин 1 і 2 ламаного стрижня прикріпленого в точці  $B$ :

$$m_1 = 0,6m; \quad m_2 = 0,4m;$$

$$G_1 = 0,6mg = 0,6 \cdot 10 \cdot 9,81 = 58,9 \text{ Н};$$

$$G_2 = 0,4mg = 0,4 \cdot 10 \cdot 9,81 = 39,2 \text{ Н}.$$

$$\text{Вага точкової маси 3: } G_3 = m_3g = 3 \cdot 9,81 = 29,4 \text{ Н}.$$

Покажемо діючі на систему сили: активні сили  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$ , реакції в'язей – складові реакції підп'ятника  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  і реакцію циліндричного

підшипника  $\bar{R}_K$ .

Знайдемо сили інерції ламаного стрижня і вантажу (матеріальної точки 3).

$$\bar{\Phi}_1 = -m_1 \bar{a}_{C1}; \quad \bar{\Phi}_2 = -m_2 \bar{a}_{C2}; \quad \bar{\Phi}_3 = -m_3 \bar{a}_3;$$

$$\Phi_1 = m_1 a_{C1}; \quad \Phi_2 = m_2 a_{C2}; \quad \Phi_3 = m_3 a_3.$$

Сили інерції, діючі на стрижень  $BL$ , пропорційні відстаням від точок їх прикладення до вала і розподілені за лінійним законом (рис. 1.7). Рівнодіюча сил інерції прикладена в точці, яка знаходиться на відстані  $2/3$  від вершини трикутника (від точки  $B$ ).

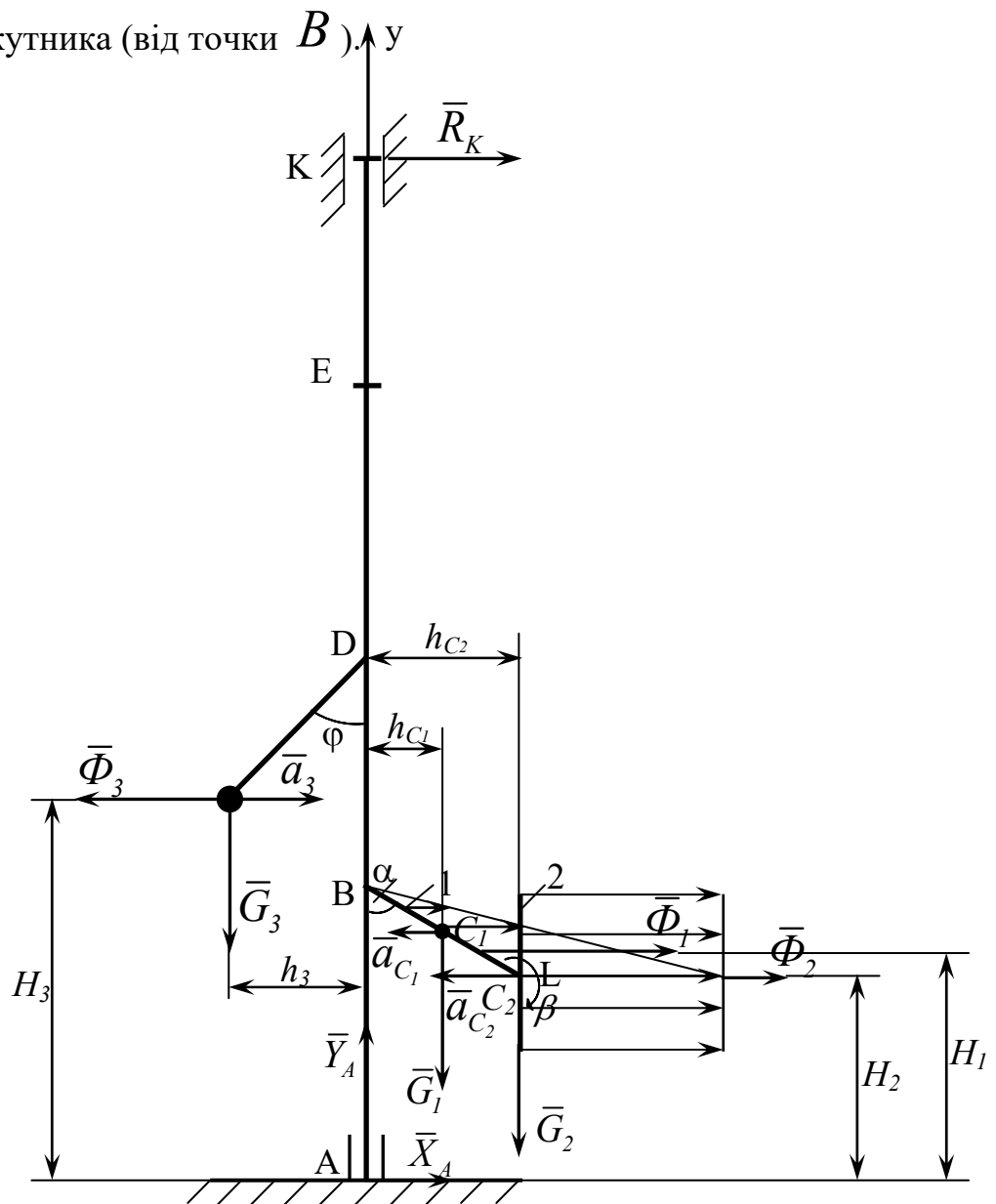


Рисунок 1.7

Сили інерції стрижня 2 утворюють прямокутник. Рівнодіюча сил інерції прикладена в точці  $L$ .

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1}; \quad a_{C2} = \omega^2 h_{C2}; \quad a_3 = \omega^2 h_3;$$

$$h_{C1} = 3b \cdot \sin 60^\circ = 0,3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,26 \text{ м};$$

$$h_{C2} = 6b \cdot \sin 60^\circ = 0,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,52 \text{ м};$$

$$h_3 = 4b \cdot \sin 45^\circ = 0,4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,28 \text{ м}.$$

Знайдемо  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ :

$$\Phi_1 = 0,6m \cdot \omega^2 \cdot h_{C1} = 0,6 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot 0,26 = 156 \text{ Н};$$

$$\Phi_2 = 0,4m \cdot \omega^2 \cdot h_{C2} = 0,4 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot 0,52 = 208 \text{ Н};$$

$$\Phi_3 = m_3 \cdot \omega^2 \cdot h_3 = 3 \cdot 10^2 \cdot 0,28 = 84 \text{ Н}.$$

За принципом Даламбера:

$$\sum \bar{F}_K^{(e)} + \sum \bar{\Phi}_K = 0;$$

$$\sum \bar{M}_0 \left( \bar{F}_K^{(e)} \right) + \sum \bar{M}_0 \left( \bar{\Phi}_K \right) = 0;$$

$$\begin{cases} \sum F_{Kx} = 0; & -\Phi_3 + \Phi_1 + \Phi_2 + X_A - R_K = 0; \\ \sum F_{Ky} = 0; & -G_3 - G_1 - G_2 + Y_A = 0; \\ \sum M_A(\bar{F}_K) = 0; & \Phi_3 \cdot H_3 + G_3 \cdot h_3 - R_K \cdot 4a - \\ & -G_1 \cdot h_{C1} - \Phi_1 \cdot H_1 - G_2 \cdot h_{C2} - \Phi_2 \cdot H_2 = 0; \end{cases}$$

$$H_3 = 2a - l \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot 0,6 - 4 \cdot 0,1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,9 \text{ м};$$

$$H_2 = a - 6b \cdot \cos 60^\circ = 0,6 - 6 \cdot 0,1 \cdot \frac{1}{2} = 0,3 \text{ м};$$

$$H_1 = a - \frac{2}{3} \cdot 6b \cdot \cos 60^\circ = 0,6 - \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 0,1 \cdot \frac{1}{2} = 0,4 \text{ м};$$

$$\begin{cases} -84 + 156 + 208 + X_A + R_K = 0; \\ -29,4 - 58,9 - 39,2 + Y_A = 0; \\ 84 \cdot 0,9 + 29,4 \cdot 0,28 - R_K \cdot 4 \cdot 0,6 - 58,9 \cdot 0,26 - \\ -156 \cdot 0,4 - 39,2 \cdot 0,52 - 208 \cdot 0,3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_A + R_K = -280 \text{ Н}; \\ Y_A = 127,5 \text{ Н}; \\ R_K = -31,6 \text{ Н}; \end{cases}$$

$$X_A = -280 - R_K \Rightarrow X_A = -280 + 31,6 = -248,4 \text{ Н}.$$

Відповідь:

$$X_A = -248,4 \text{ Н}; Y_A = 127,5 \text{ Н}; R_K = -31,6 \text{ Н}.$$

### Приклад 1.5

Розглянути рух системи, що складається з барабана вагою  $G$  (маси  $m$ ), радіуса  $R$  і вантажу вагою  $G_1$  (маса  $m_1$ ), що висить на мотузці, намотаній на барабан (рис. 1.8); масою мотузки знехтувати. Визначити рух такої системи і натяг мотузки, нехтуючи силою тертя в осі барабана і вважаючи барабан однорідним суцільним циліндром.

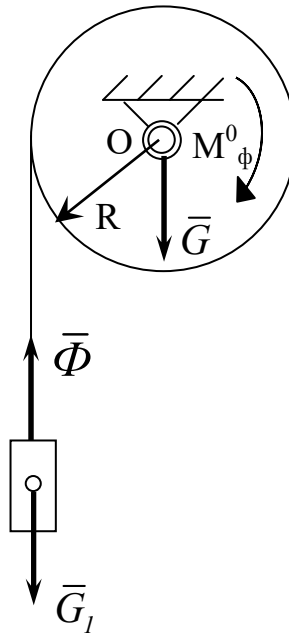


Рисунок 1.8

### Рішення

Позначимо кутове прискорення барабана через  $\tilde{\varepsilon}$ , вважаючи  $\tilde{\varepsilon}$  додатним, якщо барабан обертається прискорено в напрямку, зворотному годинниковій стрілці. Введемо силу інерції вантажу, рівну  $\Phi = m_1 R \tilde{\varepsilon}$ , а також наведемо сили інерції барабана до статично еквівалентної пари  $M_{\Phi}^{(O)} = J_O \tilde{\varepsilon}$ , складаємо рівняння моментів щодо осі обертання:

$$m_1 g R - \Phi R - M_{\Phi}^{(O)} = 0$$

або 
$$m_1 g R - m_1 R^2 \varepsilon - M_{\Phi}^{(o)} - J_0 \varepsilon = 0. \quad (1.22)$$

Згадуючи, що  $J_0 = mR^2/2$ , одержуємо:

$$\varepsilon = \frac{2m_1}{(2m_1 + m) R} g.$$

Щоб знайти натяг мотузки, застосуємо принцип звільнення: розсічемо мотузку і прикладемо до вантажу натяг мотузки  $\bar{N}$ . Тоді, згідно з рівнянням рівноваги вантажу під дією сили ваги  $\bar{G}_1$ , натягу  $\bar{N}$ , і сили інерції  $\bar{S}$ , знайдемо:

$$G_1 - N - \Phi = 0,$$

$$N = G_1 - \Phi = m_1 g - m_1 R \varepsilon = \frac{m}{2m_1 + m} m_1 g.$$

### Приклад 1.6

Центр ваги  $C$  фізичного маятника (рис. 1.9) вагою  $G$  і маси  $m$  знаходиться на відстані  $S$  від осі підвісу  $O$ . Радіус інерції щодо осі, яка проходить паралельно осі підвісу і через центр ваги, дорівнює  $\rho_C$ . Визначити реакції точки  $O$ .

## Рішення

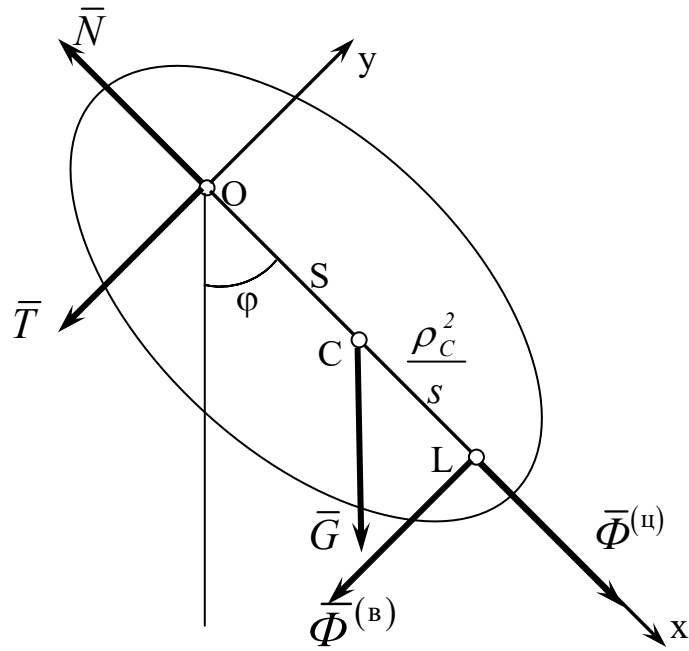


Рисунок 1.9

Рівнодіюча сил інерції прикладена в центрі  $L$  коливань маятника; її можна розкласти на відцентрову й обертальну складові, рівні:

$$\Phi^{(\text{Ц})} = ms\dot{\varphi}^2, \quad \Phi^{(\text{В})} = ms\ddot{\varphi}.$$

Залишається розглянути задачу статички, тобто написати три рівняння рівноваги для плоскої системи сил  $\bar{\Phi}^{(\text{В})}$ ,  $\bar{\Phi}^{(\text{Ц})}$ ,  $\bar{G}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{N}$ , де  $\bar{G}$  – сила ваги,  $\bar{N}$ ,  $\bar{T}$  – складові реакції осі  $O$ , напрямки яких, прийняті за додатні, зазначені на рисунку 1.8. Одержуємо:

$$T + mgs\sin\varphi + ms\ddot{\varphi} = 0, \tag{1.23}$$

$$-N + mg\cos\varphi + m\dot{\varphi}^2 = 0,$$



$$ms \left( s + \frac{\rho_C^2}{s} \right) \ddot{\varphi} + mgs \sin\varphi = 0. \quad (1.24)$$

З останнього рівняння знайдемо:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{gs}{\rho_C^2 + s^2} \sin\varphi \quad (1.25)$$

чи після інтегрування

$$\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2 = \frac{2gs}{\rho_C^2 + s^2} (\cos\varphi - \cos\varphi_0), \quad (1.26)$$

де  $\dot{\varphi}_0, \varphi_0$  – початкові значення кутової швидкості і кута відхилення маятника; це співвідношення можна одержати також, застосувавши теорему про зміну кінетичної енергії.

Одержуємо:

$$T = \frac{mg\rho_C^2}{\rho_C^2 + s} \sin\varphi,$$

$$N = \left( \frac{3s^2 + \rho_C^2}{s^2 + \rho_C^2} \cos\varphi - \frac{2s^2}{s^2 + \rho_C^2} \cos\varphi_0 \right) mg + ms\dot{\varphi}_0^2.$$

Нехай, зокрема, маятник являє собою тонкий однорідний стрижень довжиною  $l$ ; тоді  $s = l/2$ ,  $\rho_C^2 = l^2/12$  і, отже,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2l} \sin\varphi, \quad \dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2 = \frac{3g}{2l} (\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Значення складових реакцій осі будуть:

$$T = -\frac{1}{4} mgsin\varphi,$$

$$N = \frac{ml\dot{\varphi}^2}{2} + \left( \frac{5}{2} \cos\varphi - \frac{3}{2} \cos\varphi_0 \right) mg.$$

### Приклад 1.7

Механічна система (рис. 1.10), розташована у вертикальній площині, складається з вантажів 1 і 2, які підвішені на невагомим нерозтяжних нитках, що намотані на ступінчатий барабан 3. До барабана жорстко прикріплений невагомий стрижень на кінці якого знаходиться точкова маса 4. Барабан 3 утримується двома невагомими стрижнями  $AC$  і  $BC$ . Радіус інерції барабана  $\rho$ . Рух системи відбувається під дією моменту  $M$ , прикладеного до барабана і сил ваги.

Дано:

$$m_1 = 8 \text{ кг}, m_2 = 2 \text{ кг}, m_3 = 3 \text{ кг}, m_4 = 1 \text{ кг}, M = 10 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$r = 0,1 \text{ м}, R = 0,2 \text{ м}, r = 0,15 \text{ м}, l = 0,25 \text{ м}, \alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ.$$

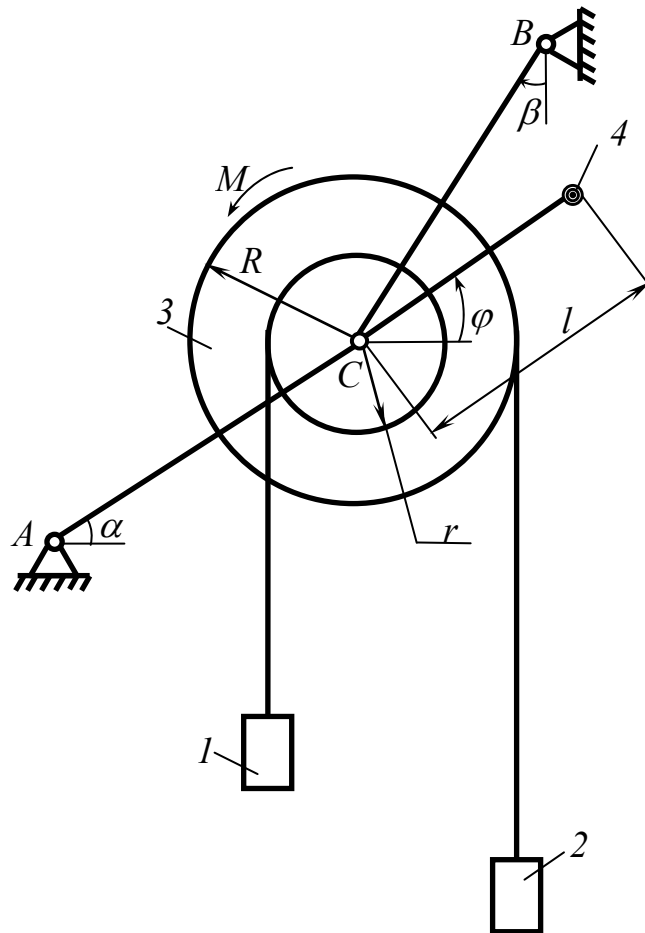
Початкові умови:  $\varphi_0 = 0, \omega_0 = 0$ .

У розрахунках узяти  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

Визначити реакції зовнішніх зв'язків механічної системи при

$$\varphi_1 = \frac{5}{3} \pi.$$

*Рішення*



*Рисунок 1.10*

Для визначення реакцій в'язей скористаємося принципом Даламбера, який для механічної системи виражається рівняннями:

$$\sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{\Phi}_k = 0, \quad (1.27)$$

$$\sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^e) + \sum \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0. \quad (1.28)$$

Де  $\bar{F}_k^e$  та  $\bar{\Phi}_k$  – рівнодіючі активних сил інерції, прикладених до  $k$ -ї точки;

$\bar{M}_0(\bar{F}_k^e)$  та  $\bar{M}_0(\bar{\Phi}_k)$  – моменти відповідних сил щодо довіль-

ної точки  $O$ .

На розглянуту механічну систему діють сили ваги:  $\bar{P}_1 = m_1 \bar{g}$ ,  $\bar{P}_2 = m_2 \bar{g}$ ,  $\bar{P}_3 = m_3 \bar{g}$ ,  $\bar{P}_4 = m_4 \bar{g}$  і момент  $M$ .

В'язми, накладені на систему, є невагомі стрижні із шарнірним закріпленням на кінцях. Відповідно до аксіоми в'язей відкидаємо в'язі, замінюючи їхню дію реакціями  $\bar{R}_A$  та  $\bar{R}_B$  (рис. 1.11). Реакції  $\bar{R}_A$  та  $\bar{R}_B$  показані в припущенні, що стрижні розтягнуті.

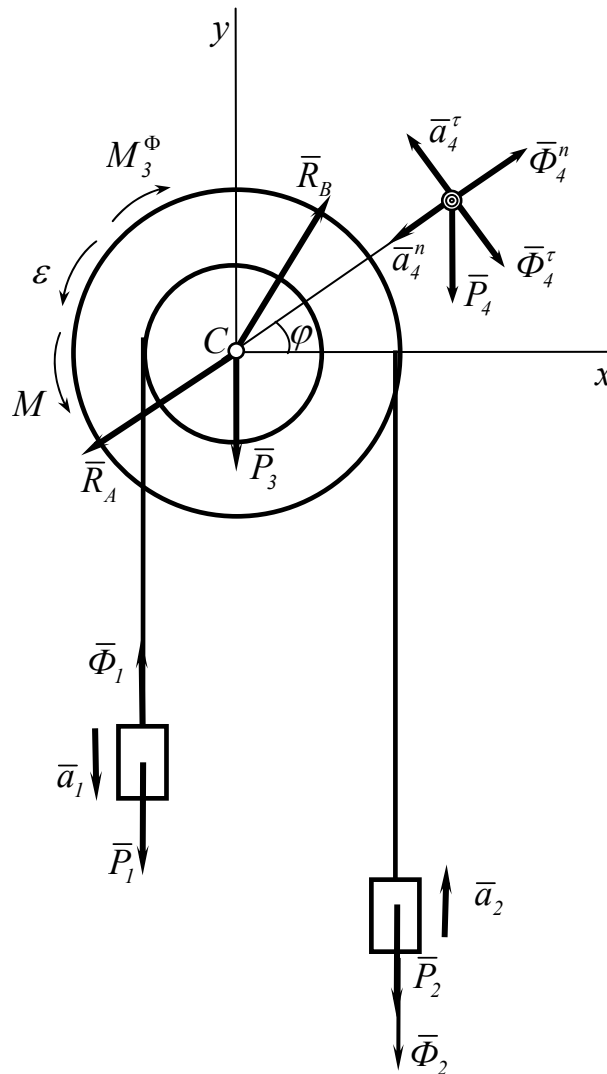


Рисунок 1.11

До активних сил і реакцій в'язей треба додати сили інерції і момент сил інерції:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_1 &= -m_1 \bar{a}_1; & \bar{\Phi}_2 &= -m_2 \bar{a}_2; & \bar{\Phi}_4 &= \bar{\Phi}_4^n + \bar{\Phi}_4^\tau; \\ \bar{\Phi}_4^n &= -m_4 \bar{a}_4^n; & \bar{\Phi}_4^\tau &= -m_4 \bar{a}_4^\tau; & \bar{M}_3^\Phi &= -J_3 \bar{\varepsilon}.\end{aligned}\quad (1.29)$$

Виразимо прискорення точок системи через кутову швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$  барабана 3:

$$a_1 = r\varepsilon; \quad a_2 = R\varepsilon; \quad a_4^n = l\omega^2; \quad a_4^\tau = l\varepsilon. \quad (1.30)$$

Момент інерції барабана 3 –

$$J_3 = m_3 \rho^2. \quad (1.31)$$

З урахуванням формул (1.30) і (1.31) модулі сил інерції запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= m_1 r \varepsilon; & \Phi_2 &= m_2 R \varepsilon; \\ \Phi_4^n &= m_4 l \omega^2; & \Phi_4^\tau &= m_4 l \varepsilon; & M_3^\Phi &= m_3 \rho^2 \varepsilon.\end{aligned}\quad (1.32)$$

Згідно з принципом Даламбера складемо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx}^e + \sum \Phi_{kx} &= 0, & -R_A \cdot \cos 30^\circ + R_B \cdot \sin 30^\circ + \\ & + \Phi_4^n \cdot \cos \varphi + \Phi_4^\tau \cdot \sin \varphi &= 0,\end{aligned}\quad (1.33)$$

$$\begin{aligned}\sum F_{ky}^e + \sum \Phi_{ky} &= 0, & -R_A \cdot \sin 30^\circ + R_B \cdot \cos 30^\circ + \\ & + \Phi_4^n \cdot \sin \varphi + \Phi_4^\tau \cdot \cos \varphi - P_1 - \\ & - P_2 - P_3 - P_4 + \Phi_1 - \Phi_2 &= 0,\end{aligned}\quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \sum M_C(\bar{F}_k^e) + \sum M_C(\bar{\Phi}_k) &= 0, \\ M + P_1 \cdot r - P_2 \cdot R - P_4 \cdot l \cdot \cos\varphi - \Phi_1 r - \\ - \Phi_2 R - \Phi_4^r \cdot l - M_3^\Phi &= 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Вираз (1.32) підставимо в рівняння (1.35):

$$\begin{aligned} M + m_1 gr - m_2 gR - m_4 gl \cos\varphi - m_1 r^2 \varepsilon - \\ - m_2 R^2 \varepsilon - m_4 l^2 \varepsilon - m_3 \rho^2 \varepsilon &= 0. \end{aligned}$$

Підставивши вихідні дані і з урахуванням, що  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ , одержимо

$$\begin{aligned} (8 \cdot 0,1^2 + 2 \cdot 0,2^2 + 3 \cdot 0,15^2 + 1 \cdot 0,25^2) \ddot{\varphi} + \\ + 1 \cdot 10 \cdot 0,25 \cdot \cos\varphi - 10 - 8 \cdot 10 \cdot 0,1 + 2 \cdot 10 \cdot 0,2 = 0 \end{aligned}$$

або

$$1,01\ddot{\varphi} + 2,5\cos\varphi - 14 = 0.$$

Тоді

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = 13,86 - 2,48\cos\varphi. \quad (1.36)$$

Використаємо теорему про зміну кінетичної енергії:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \quad (1.37)$$

У початковий момент часу система знаходилася в стані спокою, тому

$$T_0 = 0.$$

Для незмінної механічної системи  $\sum A_k^i = 0$ . . Тоді рівняння (1.37) Набуває вигляду

$$T = \sum A_k^e. \quad (1.38)$$

Кінетична енергія системи –

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (1.39)$$

Знайдемо кінетичну енергію кожного з тіл, що входять до системи:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 r^2 \omega^2}{2}; & T_2 &= \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_2 R^2 \omega^2}{2}; \\ T_3 &= \frac{J_3 \omega^2}{2} = \frac{m_3 \rho^2 \omega^2}{2}; & T_4 &= \frac{m_4 V_4^2}{2} = \frac{m_4 l^2 \omega^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Підставимо (1.40) у (1.39):

$$T = \left( m_1 r^2 + m_2 R^2 + m_3 \rho^2 + m_4 l^2 \right) \frac{\omega^2}{2}.$$

Підставляючи вихідні дані, знайдемо:

$$T = 1,01 \frac{\omega^2}{2} = 0,505 \omega^2. \quad (1.41)$$

Сума робіт зовнішніх сил:

$$\begin{aligned}\sum A_k^e &= A(P_1) + A(P_2) + A(P_4) + A(M) = \\ &= m_1 gr \cdot \varphi - m_2 gR \cdot \varphi - m_4 gl \sin \varphi + M \cdot \varphi.\end{aligned}\quad (1.42)$$

Підставляючи значення величин, що входять в (1.42), знайдемо:

$$\sum A_k^e = 14\varphi - 2,5 \sin \varphi.\quad (1.43)$$

Вирази (1.41) і (1.43) підставимо у формулу (1.38):

$$0,505\omega^2 = 14\varphi - 2,5 \sin \varphi\quad (1.44)$$

або

$$\omega = \sqrt{27,72\varphi - 4,95 \sin \varphi}.$$

Зазначимо, що вираз (1.44) можна одержати, проінтегрувавши рівняння (1.36).

Виконаємо заміну:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d(\omega^2)}{d\varphi}.$$

Тоді

$$\frac{1}{2} \frac{d(\omega^2)}{d\varphi} = 13,86 - 2,48 \cos \varphi.$$

Розділимо змінні і візьмемо визначений інтеграл, для якого нижня



межа інтегрування – це початкові умови, а верхня межа – поточні значення  $\varphi$  і  $\omega$ :

$$\int_{\omega_0=0}^{\omega} d(\omega^2) = 2 \int_{\varphi_0=0}^{\varphi} (13,86 - 2,48 \cos \varphi) d\varphi,$$
$$\omega^2 = 27,72\varphi - 4,95 \sin \varphi$$

або

$$\omega = \sqrt{27,72\varphi - 4,95 \sin \varphi}.$$

З формул (1.36) і (1.44) знайдемо  $\omega$  і  $\varepsilon$  при заданому кінцевому куті обертання  $\varphi_1 = \frac{5}{3}\pi$ :

$$\varepsilon = 13,86 - 2,48 \cdot \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = 12,62 \text{ c}^{-2},$$

$$\omega = \sqrt{27,72 \cdot \frac{5}{3}\pi - 4,95 \cdot \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)} = 12,22 \text{ c}^{-1}.$$

Знайдені значення кутової швидкості і кутового прискорення підставимо у формули (1.32) і знайдемо:

$$\Phi_1 = 8 \cdot 0,1 \cdot 12,62 = 10,1 \text{ Н},$$

$$\Phi_2 = 2 \cdot 0,2 \cdot 12,62 = 50,5 \text{ Н},$$

$$\Phi_4^n = 1 \cdot 0,25 \cdot 12,22^2 = 37,34 \text{ Н},$$

$$\Phi_4^r = 1 \cdot 0,25 \cdot 12,62 = 3,16 \text{ Н}.$$

Підставляючи отримані значення сил інерції в рівняння (1.33) і (1.34), знайдемо шукані реакції  $\bar{R}_A$  та  $\bar{R}_B$  для заданого положення механізму:

$$\begin{cases} -R_A \cdot \cos 30^\circ + R_B \cdot \sin 30^\circ + 37,34 \cdot \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + 3,16 \cdot \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = 0, \\ -R_A \cdot \sin 30^\circ + R_B \cdot \cos 30^\circ + 37,34 \cdot \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) - 3,16 \cdot \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) - \\ -(8 + 2 + 3 + 1) \cdot 10 + 10,1 - 5,05 = 0 \end{cases}$$

чи

$$\begin{cases} -R_A \cdot \cos 30^\circ + R_B \cdot \sin 30^\circ + 15,93 = 0, \\ -R_A \cdot \sin 30^\circ + R_B \cdot \cos 30^\circ - 42,86 = 0. \end{cases}$$

Вирішимо отриману систему рівнянь. Для цього перше рівняння помножимо на  $\cos 30^\circ$ , друге рівняння домножимо на  $\sin 30^\circ$  і від першого рівняння віднімемо друге. Після нескладних перетворень знайдемо:

$$R_A = 70,45 \text{ Н}.$$

Підставимо знайдене значення  $R_A$  в будь яке з рівнянь, знайдемо:

$$R_B = 90,17 \text{ Н}.$$

## 2 ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Принцип можливих переміщень, або принцип Лагранжа, містить необхідні й достатні умови рівноваги деяких механічних систем. Якщо механічна система з утримуючими ідеальними і стаціонарними в'язами знаходиться в стані рівноваги, то це означає, що кожна її точка теж знаходиться в рівновазі. Для цього повинен виконуватись принцип можливих переміщень, математичний вираз якого є такий:

$$\sum_i \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0, \quad (2.1)$$

де  $\bar{F}_i$  – активна сила, прикладена до  $i$ -ої точки системи;

$\bar{r}_i$  – радіус-вектор цієї точки.

При вирішенні задач за допомогою цього принципу відповідно до рівняння (2.1) необхідно:

- 1 Зобразити на схемі механічної системи всі діючі на неї активні сили.
- 2 Показати на схемі можливі переміщення точок прикладення сил і елементарні кути обертів тіл.
- 3 Розрахувати елементарну роботу всіх активних сил на можливих переміщеннях і записати рівняння відповідно.
- 4 Установити залежності між можливими переміщеннями і ввести їх в отримане рівняння.

Якщо система має декілька ступенів вільності, повторити все для кожного незалежного переміщення окремо.

Усі задачі, які вирішуються за допомогою принципу можливих переміщень розподіляються на три типи:

- 1 Необхідно визначити сили, діючі на систему, або знайти залежність між ними.
- 2 За заданими силами, які діють на систему, визначити стан її рівноваги.
- 3 Визначити реакції в'язей.

Наведемо приклади розв'язування задач за допомогою принципу можливих переміщень.

### Приклад 2.1

Кривошипно-шатунний механізм, зображений на рисунку 2.1, знаходиться у рівновазі під дією сили  $\bar{Q}$ , яка прикладена до повзуна  $B$  і пари сил з моментом  $M$ .

Знайти умови рівноваги механізму, якщо кут кривошипа  $OA$  відносно горизонталі дорівнює  $\varphi$ , кут при шарнірі  $A$  є прямим. Довжину кривошипа й шатуна взяти  $OA$  і  $AB$  відповідно.

### Рішення

Відповідно до рівняння (2.1) і рисунка 2.1 маємо:

$$Q\delta_B - M\delta\varphi = 0, \quad (2.2)$$

де  $\delta_B$  – можливе переміщення повзуна  $B$ ;

$\delta\varphi$  – можливе переміщення кривошипа  $OA$ .

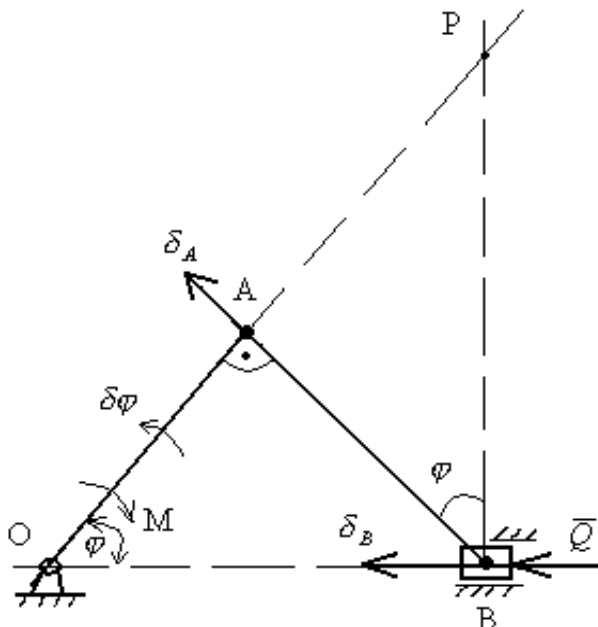


Рисунок 2.1

Виразимо елементарні переміщення одне через друге, використовуючи теорему про проекції швидкостей точок на пряму, яка з'єднує ці точки.

Урахуємо також, що переміщення точок пропорційні їх швидкостям. Тоді

$$\delta_B \cdot \sin\varphi = \delta_A, \quad (2.3)$$

де 
$$\delta_A = OA \cdot \delta\varphi. \quad (2.4)$$

Підставимо вираз (2.4) у рівняння (2.3):

$$\delta_B \sin\varphi = OA \cdot \delta\varphi,$$

відкіля 
$$\delta_B = \frac{OA}{\sin\varphi} \delta\varphi. \quad (2.5)$$

Підставимо значення  $\delta_B$  в рівняння (2.1):

$$Q \frac{OA}{\sin\varphi} \delta\varphi - M \delta\varphi = 0,$$

відкіля 
$$M = \frac{OA}{\sin\varphi} Q.$$

Взаємозв'язок між  $\delta_B$  і  $\delta\varphi$  можливо також знайти за допомогою миттєвого центра швидкостей Р (рис. 2.1). Запишемо відповідні рівняння:

$$\frac{\delta_B}{BP} = \frac{\delta_A}{AP},$$

відкіля 
$$\delta_B = \frac{BP}{AP} \delta_A,$$

де 
$$\frac{BP}{AP} = \frac{l}{\sin\varphi}, \text{ а } \delta_A = OA \cdot \delta\varphi.$$

Тоді 
$$\delta_B = \frac{OA}{\sin\varphi} \delta\varphi. \quad (2.6)$$

Результати (2.5) і (2.6) співпадають.

### Приклад 2.2

Визначити залежність між модулями сил  $\bar{P}$  і  $\bar{Q}$  в клиновому пресі, якщо сила  $\bar{P}$  прикладена до кінця рукоятки довжиною  $l$  перпендикулярно осі гвинта і рукоятки, крок гвинта дорівнює  $h$ . Кут при вершині клина  $A$  дорівнює  $\alpha$  (рис. 2.2).

### Рішення

Позначимо на рисунку всі можливі переміщення тіл, які входять в механічну систему, яку розглядаємо.

Принцип можливих переміщень відповідно до рис. 2.2 набуде такого вигляду:

$$Pl\delta\varphi - Q \cdot \delta_B = 0. \quad (2.7)$$

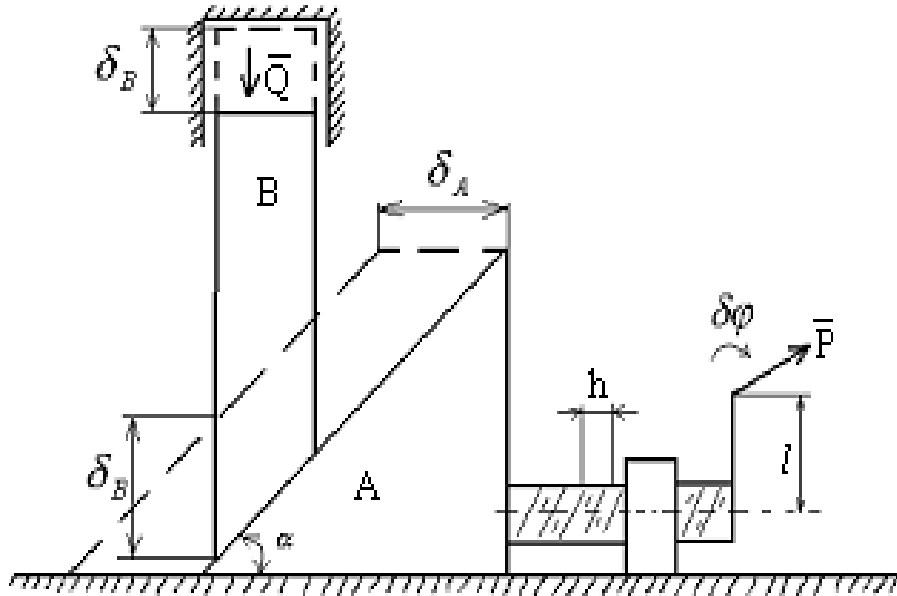


Рисунок 2.2

Якщо рукоятка здійснить повний оберт, тобто обернеться на  $2\pi$  рад, то клин  $A$  зміститься на шаг гвинта  $h$ . Оберт рукоятки на кут  $\delta\varphi$  призведе до зміщення клина на  $\delta_A$ . Таким чином, складається така пропорція:

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi - h; \\ \delta\varphi - \delta_A. \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

Звідси 
$$\delta_A = \frac{h}{2\pi} \delta\varphi. \quad (2.9)$$

Відповідно (див. рис. 2.2)

$$\frac{\delta_B}{\delta_A} = \operatorname{tg}\alpha, \quad (2.10)$$

із рівнянь (2.7) і (2.10) випливає:

$$\delta_B = \frac{htg\alpha}{2\pi} \delta\varphi. \quad (2.11)$$

Уведемо значення  $\delta_B$  відповідно до формули (1.37) в початкове рівняння (1.33).

Тоді 
$$Pl\delta\varphi - Q \frac{htg\alpha}{2\pi} \delta\varphi = 0,$$

відкіля 
$$Q = P \frac{2\pi l}{htg\alpha}.$$

### Приклад 2.3

На рисунку 2.3 зображена система важелей, яку використовують для підйому вантажу  $K$ , який підвішують до нижнього важеля 3.

Підйом вантажу  $K$  вагою  $\bar{P}$  здійснюється силою  $\bar{F}$ , спрямованою вертикально вгору і прикладеною в точці  $B$  верхнього важеля 1. Визначити відношення  $b/a$ , при якому система знаходиться в рівновазі.

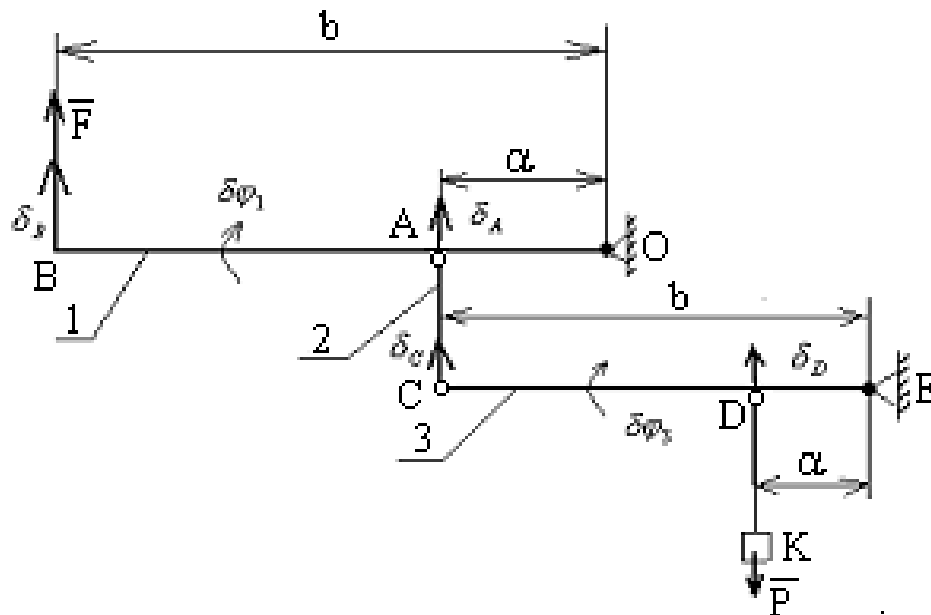


Рисунок 2.3



На рисунку 2.3 показані можливі переміщення тіл і окремих точок, які створюють механічну систему,

де  $\delta\varphi_1, \delta\varphi_3$  – можливі переміщення ричагів 1 і 3 відповідно;

$\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_D$  – можливі переміщення відповідних точок, які залежні від кутового можливого переміщення важеля 1.

Складемо рівняння рівноваги системи за допомогою принципу можливих переміщень.

$$F\delta_B - P\delta_D = 0. \quad (2.12)$$

Визначимо зв'язок між можливими переміщеннями  $\delta_B$  і  $\delta_D$ :

$$\delta_B = b\delta\varphi_1, \text{ відкіля } \delta\varphi_1 = \frac{1}{b}\delta_B,$$

$$\delta_A = a\delta\varphi_1 = \frac{a}{b}\delta_B,$$

$$\delta_C = \delta_A = \frac{a}{b}\delta_B, \quad (2.13)$$

$$\delta_C = b \cdot \delta\varphi_3. \quad (2.14)$$

Порівняємо праві частини формул (2.13) і (2.14):

$$\frac{a}{b}\delta_B = b\delta\varphi_3,$$

відкіля

$$\delta\varphi_3 = \frac{a}{b^2} \delta_B,$$

тоді

$$\delta_D = a\delta\varphi_3, \text{ або } \delta_D = \frac{a^2}{b^2} \delta_B. \quad (2.15)$$

Підставимо результат рівняння (2.15) в початкове рівняння (2.12) і розв'яжемо отримане рівняння відносно невідомого. Тоді маємо:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{P}{F}}.$$

#### Приклад 2.4

У кулісному механізмі, якщо качати кривошип  $OC$  навколо горизонтальної осі  $O$ , повзун  $A$ , пересуваючись вздовж кривошипа, заставляє рухатись стрижень  $AB$ , який переміщується вздовж вертикальних напрямляючих  $K$  (рис. 2.4). Дано розміри:  $OC = R$ ,  $OK = l$ .

Яку силу треба додати до кривошипу  $OC$  в точці  $C$  перпендикулярно до нього для того, щоб врівноважити силу  $P$ , спрямовану вздовж осі стрижня вгору?

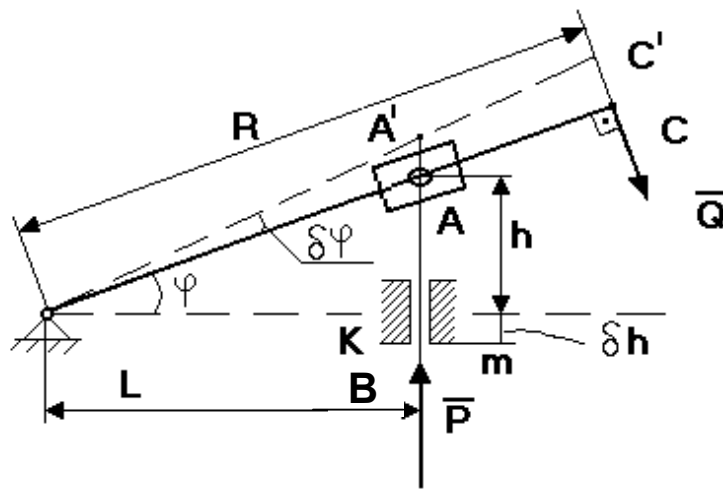


Рисунок 2.4

Задача відноситься до першого типу

### Рішення

Встановлюємо, що:

1 Механічна система – кривошипно-кулісний механізм.

2 Активні сили –  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$ .

3 Надамо системі можливе переміщення: кривошипу  $OC$  – поворот на кут  $\delta\varphi$ , стрижню  $AM$  – поступальний рух вгору  $\delta h$ .

4 Підрахуємо суму елементарних робіт активних сил:

$$P\delta h - QR\delta\varphi = 0. \quad (2.16)$$

5 Знайдемо зв'язок між  $\delta h$  і  $\delta\varphi$ :

$$\begin{aligned} \delta h = AA' &= A'K - AK = l \operatorname{tg}(\varphi + \delta\varphi) - l \operatorname{tg}\varphi = \\ &= l \frac{\sin\delta\varphi}{\cos(\varphi + \delta\varphi)\cos\varphi} = l \frac{\delta\varphi}{\cos^2\varphi}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Тоді принцип можливих переміщень (ПМП) має вигляд

$$Pl \frac{\delta\varphi}{\cos^2\varphi} - QR\delta\varphi = 0. \quad (2.18)$$

Звідки

$$Q = Pl \frac{\delta\varphi}{R\cos^2\varphi}. \quad (2.19)$$

**Зауваження**

1 Співвідношення між  $\delta h$  і  $\delta\varphi$  можна знайти також іншим чином:

$$h = l \cdot \operatorname{tg} \varphi .$$

Звідси:

$$\delta h = \frac{\delta h}{\delta \varphi} \delta \varphi \quad (2.20)$$

або

$$\delta h = \frac{l}{\cos^2 \varphi} \delta \varphi . \quad (2.21)$$

2 Можна запропонувати ще один засіб визначення зв'язку між  $\delta h$  і  $\delta\varphi$ .

Розглянемо весь рух точки  $A$  як складне обертання  $OC$  навколо шарніру  $O$  – переносний рух; рух повзуна по кривошипу – як відносне (рис. 2.5)

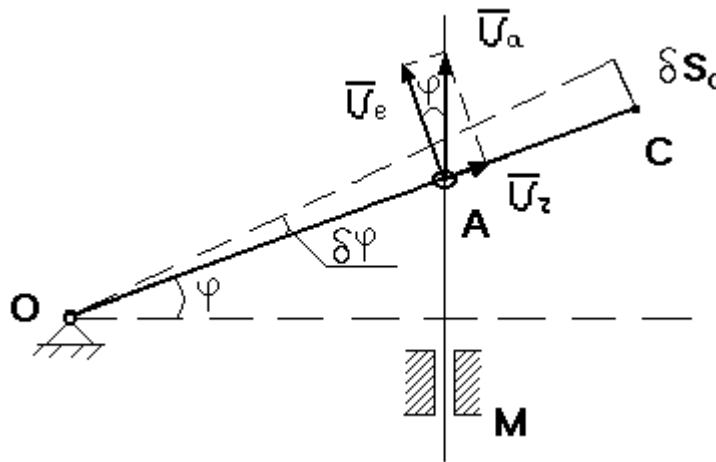


Рисунок 2.5

Тоді рух повзуна разом зі стрижнем  $AM$  являє собою абсолютний рух. Легко помітити, що

$$\frac{v_e}{v_a} = \cos \varphi \Rightarrow \frac{\delta S_A^e}{\delta S_A^a} \cos \varphi \Rightarrow \delta S_A^e = \delta S_A^a \cos \varphi . \quad (2.22)$$

З іншого боку,

$$\frac{OC}{OA} = \frac{\delta S_e}{\delta S_A^e}; \quad \delta S_A^e = \delta S_C \cdot \frac{l}{\cos\varphi \cdot R}, \quad (2.23)$$

де  $\delta S_C = R\delta\varphi$ .

У результаті маємо:

$$\delta\varphi \cdot \frac{l}{\cos\varphi} = \delta h \cos\varphi \quad (2.24)$$

або

$$\delta h = \frac{l}{\cos^2\varphi} \delta\varphi. \quad (2.25)$$

### Приклад 2.5

Механізм, розташований у горизонтальній площині, знаходиться під дією прикладених сил у рівновазі (рис. 2.6); положення визначається кутами  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$ . Довжини стрижнів механізму дорівнюють  $l_1 = 0,4$  м;  $l_4 = 0,6$  м; точка  $E$  знаходиться в середині відповідного стрижня.

На повзун  $B$  механізму діє сила пружності  $\bar{F}$  пружини, яка чисельно дорівнює  $F = c\lambda$ , а на кривошипи  $O_1A$  і  $O_2D$  діють пари сил з моментами  $M_1$  і  $M_2$ .

Визначити, чому дорівнює при рівновазі деформація  $\lambda$  пружини, і вказати, розтягнута вона чи стиснена.

$$\alpha = 60^\circ; \quad \beta = 150^\circ; \quad \gamma = 150^\circ; \quad \varphi = 90^\circ; \quad \theta = 30^\circ;$$

$$c = 140 \text{ Н/см}; \quad M_1 = 320 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad M_2 = 220 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

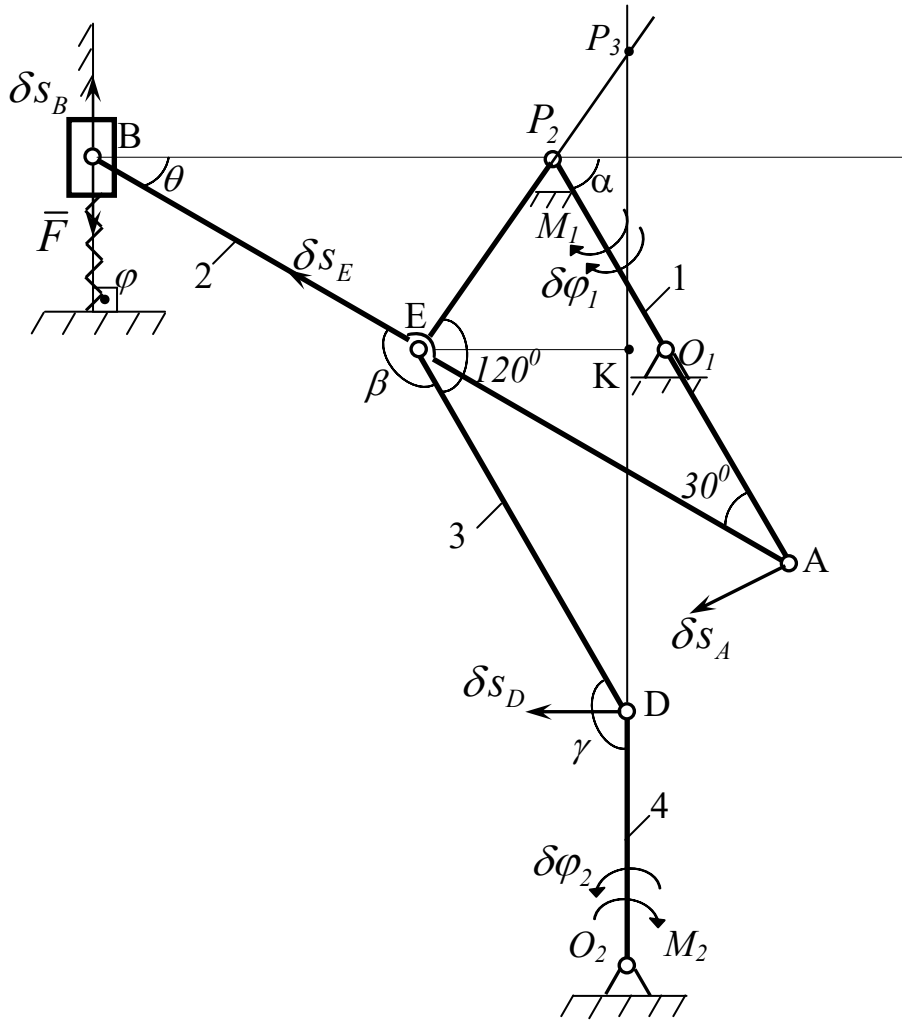


Рисунок 2.6

### Рішення

Для рішення скористаємося принципом можливих переміщень, відповідно до якого

$$\sum \delta A_K = 0, \quad (2.26)$$

де  $\delta A_K$  – елементарні роботи активних сил на відповідних ділянках можливих переміщень.

Невідому силу  $F$  знайдемо з рівняння (2.26), а знаючи  $F$  і з огляду на те, що  $F = c\lambda$ , визначимо  $\lambda$ .

Щоб скласти рівняння (2.26), надамо механізму можливі перемеще-

ня та введемо наступні позначення для переміщень ланок, до яких прикладені активні сили:  $\delta\varphi_1$  – поворот стрижня 1 навколо осі  $O_1$ ;  $\delta s_B$  – переміщення повзуна в точці  $B$ .

Знайдемо і зобразимо  $\delta s_A$ , одержимо:

$$\delta s_A = l_1 \delta\varphi_1; \quad \delta s_A \perp O_1A.$$

Знайдемо  $\delta s_B$ , для чого спроецюємо  $\delta s_A$  і  $\delta s_B$  на  $BA$ :

$$\delta s_B = \delta s_A = l_1 \delta\varphi_1; \quad \delta s_E = \delta s_A \cdot \cos 60^\circ = l_1 \delta\varphi_1 \cdot \frac{1}{2};$$

$$\delta s_D = l_4 \cdot \delta\varphi_2; \quad \text{та з}$$

$$\square EP_3D: \quad \frac{\delta s_E}{P_3E} = \frac{\delta s_D}{PD}; \quad \delta s_D = \frac{\delta s_E \cdot P_3D}{P_3E};$$

$P_3E = l_3$ , тому що  $\square EP_3D$  – рівнобічний, і  $P_3E = ED$ ;

$P_3E = l_3 \cos 30^\circ$  з  $\square EKD$ , тоді

$$\delta s_D = \frac{\delta s_E \cdot l_3 \cdot \cos 30^\circ}{l_3} = \delta s_E \cos 30^\circ;$$

$$\delta s_D = l_1 \cdot \delta\varphi_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = l_1 \cdot \delta\varphi_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_D}{l_4} = \frac{l_1}{l_4} \cdot \delta\varphi_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Складемо для механізму рівняння (2.26):

$$M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \delta \varphi_2 - F \cdot \delta s_B = 0,$$

замінивши  $\delta \varphi_2$  й  $\delta s_B$ , одержимо:

$$M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} \delta \varphi_1 \frac{\sqrt{3}}{4} - F \cdot l_1 \delta \varphi_1 = 0;$$

$$\left( M_1 - M_2 \frac{l_1}{l_4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - F \cdot l_1 \right) \delta \varphi_1 = 0.$$

Підставляючи значення, одержимо:

$$\left( 320 - 220 \cdot \frac{0,4}{0,6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - F \cdot 0,4 \right) \delta \varphi_1 = 0;$$

$$320 - 63,5 = F \cdot 0,4;$$

$$F = 641,25;$$

$$c \cdot \lambda = 641,25;$$

$$\lambda = \frac{641,25}{140};$$

$$\lambda = 4,58 \text{ см.}$$

Відповідь:  $\lambda = 4,58$  см, пружина була розтягнута, як вказує знак.

### Прилад 2.6

Горизонтальна балка  $AD$  складена з двох балок:  $AC$  і  $CD$ , шарнірно з'єднаних в точці  $C$ . Кінець балки  $D$  жорстко прикріплений до стіни (рис. 2.7).



Визначити момент реакції жорсткого кріплення, якщо на балку діють рівні вертикальні сили  $\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = \bar{F}_3$ , а також момент  $M$  пари сил. Розміри вказані на рисунку 2.7. Силами ваги балок знехтувати.

**Рішення**

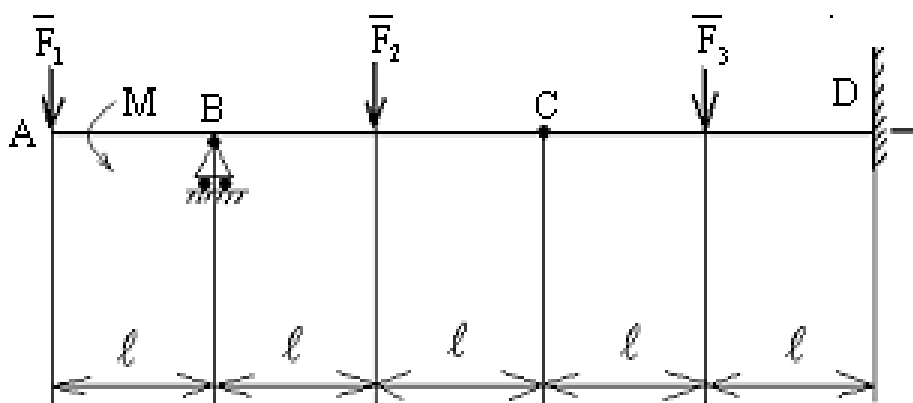


Рисунок 2.7

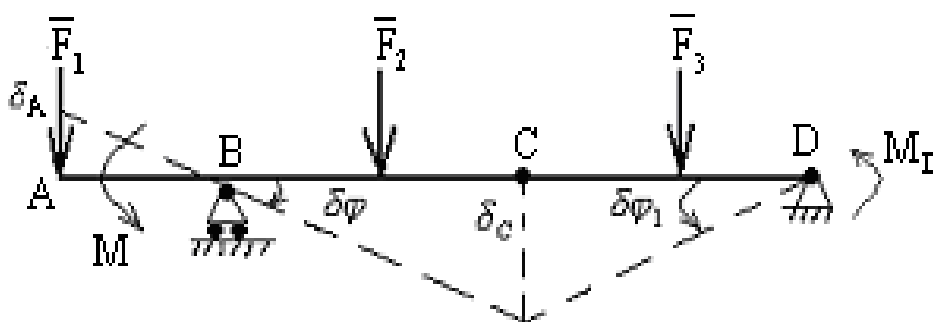


Рисунок 2.8

Замінімо жорстке кріплення в точці  $D$  для плоскої системи прикладених сил плоским шарніром і моментом жорсткого кріплення  $M_D$  (рис. 2.8). Останні в'язи є ідеальними, якщо знехтувати тертям в шарнірах і катковій опорі. Вони стаціонарні й незвільнюючі. Прикладеними силами з'являються  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  і пари сил з моментами  $M$  і  $M_D$ . Надамо системі можливе переміщення, надавши їй обертання на елементарний кут  $\delta\varphi$  навколо точки  $B$ . В'язи допускають таке переміщення. Складена балка займе стан, показаний на рисунку 2.8 пунктиром. Каткова опора при

цьому зміщується в горизонтальному напрямку, але прикладені сили не здійснюють роботи на горизонтальних переміщеннях.

Відповідно до принципу можливих переміщень

$$-F_1\delta_1 - M\delta\varphi + F_2\delta_2 + F_3\delta_3 + M_D\delta\varphi_1 = 0. \quad (2.27)$$

Можливі переміщення  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  слід брати як прямолінійні відрізки, спрямовані по дотичних до дуг кіл, тобто за лінією дії сил.

У складеній балці тільки один ступінь вільності, і тому вона має одне довільне можливе переміщення, наприклад  $\delta\varphi$ . Для останніх можливих переміщень маємо:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= l\delta\varphi; \\ \delta_2 &= l\delta\varphi; \\ \delta_3 &= l\delta\varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Можливе переміщення точки  $C$  виражається через кути  $\delta\varphi$  і  $\delta\varphi_1$ :

$$\delta_C = 2l\delta\varphi = 2l\delta\varphi_1,$$

тому 
$$\delta\varphi_1 = \delta\varphi. \quad (2.29)$$

Підставивши отримані значення можливих переміщень (2.28) і (2.29) в рівняння (2.27) і враховуючи, що  $F_1 = F_2 = F_3 = F$ , отримаємо:

$$\delta\varphi(-Fl - M + Fl + M_D) = 0,$$

звідки

$$-M + Fl + M_D = 0,$$

тоді

$$M_D = M - Fl.$$

### Приклад 2.7

Користуючись принципом можливих переміщень, визначити реакції складеної рами, зображеної разом із заданим навантаженням на рисунку 2.9,

якщо  $P_1 = 10 \text{ кН}$ ,  $q = 5 \text{ кН/м}$ ,  $P_2 = 80 \text{ кН}$  і

$$|M| = 200 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

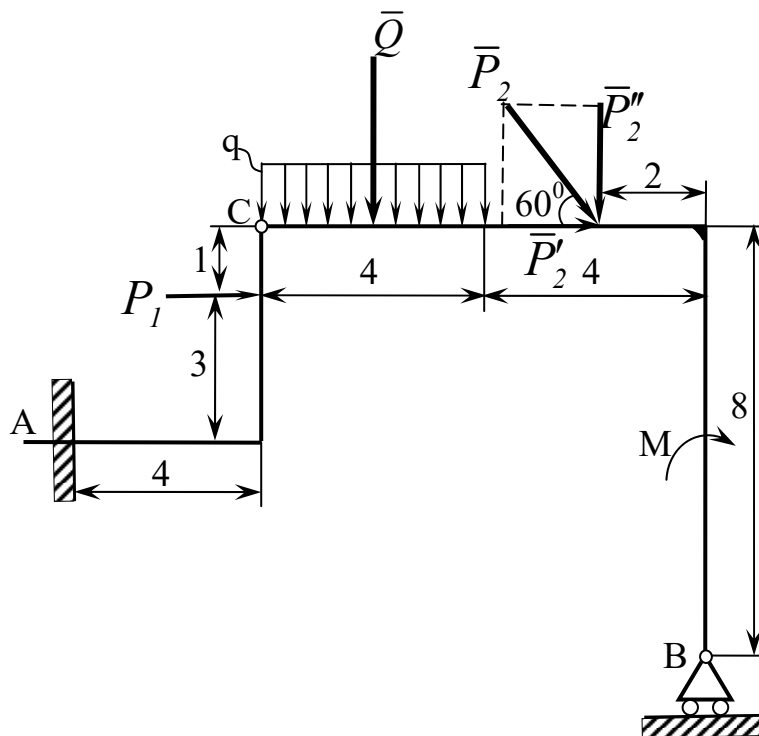


Рисунок 2.9

### Рішення

Замінімо рівномірно розподілене навантаження зосередженою силою  $Q = q \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ кН}$ , прикладеною до середини завантаженої ділянки,

а силу  $\bar{P}_2$  розкладемо на горизонтальну і вертикальну складові:

$$P'_2 = P_2 \cos 60^\circ = 80 \cdot 0,5 = 40 \text{ кН},$$

$$P''_2 = P_2 \sin 30^\circ = 80 \sqrt{3}/2 = 40 \sqrt{3} = 69,3 \text{ кН}.$$

Спочатку визначимо реакцію жорсткого закріплення, реактивний момент  $M_A$ , горизонтальну складову  $\bar{X}_A$  і вертикальну складову  $\bar{Y}_A$ . Для визначення реактивного моменту  $M_A$  відкинемо зв'язок, що перешкоджає повороту рами, замінивши закріплення шарнірно-нерухоною опорою, і прикладемо до рами реактивний момент  $M_A$  (рис. 2.10, а).

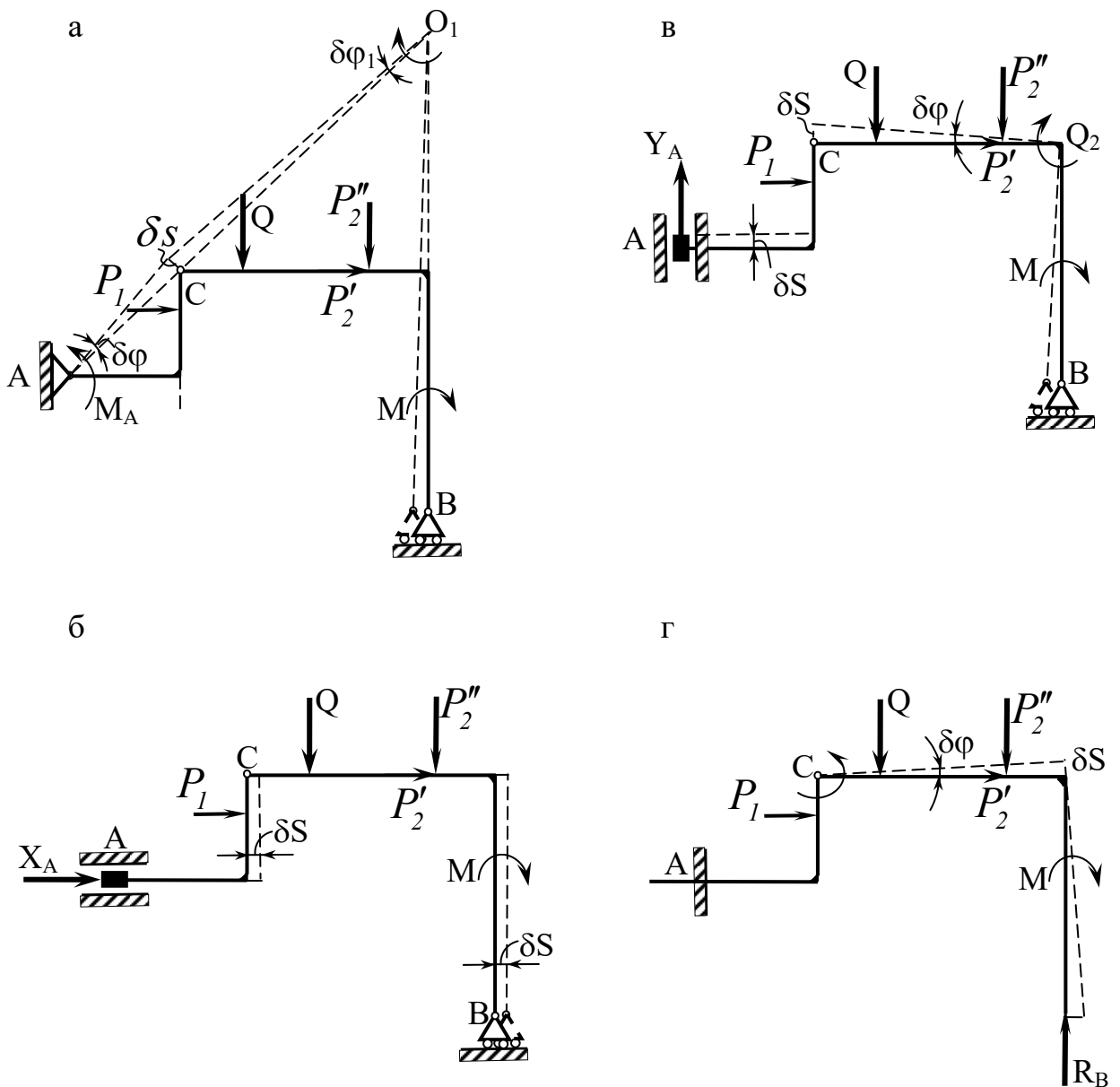


Рисунок 2.10

Надамо системі можливе переміщення, повернувши раму  $AC$  навколо шарніра  $A$  на кут  $\delta\varphi$ , наприклад, проти напрямку обертання годинникової стрілки.

Тоді рама  $CB$  буде здійснювати плоский рух. Знайдемо миттєвий центр обертання  $O_1$  і, виражаючи елементарне переміщення  $\delta s$  шарніра  $C$  через елементарні кути повороту  $\delta\varphi$  рами  $AC$  і  $\delta\varphi_1$  рами  $CB$ , знайдемо співвідношення між ними:

$$\delta s = AC \cdot \delta\varphi = O_1C \cdot \delta\varphi_1;$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{AC}{O_1C} \delta\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} \delta\varphi = 0,5\delta\varphi.$$

Зауважимо, що поворот рами  $CB$  навколо миттєвого центра обертання  $O_1$  на кут  $\delta\varphi_1$  буде відбуватися за напрямком обертання годинникової стрілки.

Складемо рівняння робіт для визначення реактивно моменту  $M_A$ , з огляду на те, що робота сили при повороті тіла дорівнює моментові сили щодо центра обертання, помноженого на кут повороту тіла, і додатня у випадку, якщо напрямки моменту і кута повороту збігаються.

$$M_A \delta\varphi - P_1 3\delta\varphi - Q \cdot 6 \delta\varphi_1 - P_2' \cdot 8 \delta\varphi_1 - P_2'' 2 \delta\varphi_1 + M \delta\varphi_1 = 0.$$

Підставимо сюди значення  $\delta\varphi_1$ :

$$M_A \delta\varphi - P_1 3\delta\varphi - Q \cdot 6 \cdot 0,5\delta\varphi - P_2' \cdot 8 \cdot 0,5\delta\varphi - P_2'' \cdot 2 \cdot 0,5\delta\varphi + M \cdot 0,5\delta\varphi_1 = 0.$$

Звідси

$$M_A = 3P_1 + 3Q + 4P'_2 + P''_2 - 0,5M = 219 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для визначення горизонтальної складової жорсткого закріплення  $\bar{X}_A$  зобразимо опору у вигляді повзуна  $A$ , що рухається в горизонтальних напрямних, жорстко скріпленого з рамою  $AC$ , і прикладемо до нього реакцію  $\bar{X}_A$  (рис. 2.10, б). Надамо всій системі можливе переміщення - поступальне переміщення  $\delta\bar{s}$ , наприклад, вправо, тому що поворот повзуна в напрямних неможливий.

Складемо рівняння робіт для визначення величини горизонтальної складової жорсткого закріплення  $X_A$ :

$$X_A \delta s + P_1 \delta s + P'_2 \delta s = 0; \quad X_A = -P_1 - P'_2 = -50 \text{ кН}.$$

Знак мінус показує, що горизонтальна складова жорсткого закріплення спрямована в бік, протилежний напрямку, зазначеному на рис. 2.10, б.

Для визначення вертикальної складової  $\bar{Y}_A$  відкинемо в'язь, що перешкоджає вертикальному переміщенню точки  $A$ , замінивши жорстке закріплення повзуном  $A$  у вертикальних напрямних, жорстко зв'язаними з рамою  $AC$ , і прикладемо до нього реакцію  $\bar{Y}_A$ .

Дамо рамі  $AC$  можливе переміщення, а саме – поступальне переміщення  $\delta s$  наприклад, вгору. Тоді рама  $CB$  буде здійснювати плоский рух, а точка  $O_2$  буде її миттєвим центром обертання. Складемо рівняння робіт для визначення величини вертикальної складової  $Y_A$ , виразивши пе-

реміщення всіх точок через елементарний кут  $\delta\varphi$  повороту рами  $CB$  навколо миттєвого центра обертання  $O_2$ , з огляду на те, що можливе переміщення шарніра  $C$  дорівнює поступальному переміщенню рами  $AC$  і  $\delta s = \delta\delta\varphi$  (рис. 1.10, в).

$$Y_A \delta\delta\varphi - Q \cdot 6\delta\varphi - P_2'' \cdot 2\delta\varphi + M \delta\varphi = 0,$$

відкіля

$$Y_A = \frac{3}{4}Q + \frac{1}{4}P_2'' - \frac{1}{8}M = 7,3 \text{ кН}.$$

Для визначення реакції рухомої опори  $B$  відкинемо цю в'язь, замінивши її дію реакцією  $\bar{R}_B$  (рис. 2.10, г). Дамо рамі  $CB$  можливе переміщення – поворот на кут  $\delta\varphi$  навколо шарніра  $C$ , наприклад, проти напрямку обертання годинникової стрілки. Тоді  $\delta s = \delta\delta\varphi$ . Рама  $AC$  при цьому залишається нерухомою.

Складемо рівняння робіт для визначення реакції  $R_B$  рухомої опори  $B$ :

$$R_B \delta\delta\varphi - Q \cdot 2\delta\varphi - P_2'' 6\delta\varphi - M \delta\varphi = 0,$$

звідси

$$R_B = \frac{2Q + 6P_2'' - M}{8} = 82 \text{ кН}.$$

Для перевірки правильності рішення задачі переконуємося в тому, що для всієї розглянутої системи задовольняються рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_{iA} = 0.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \sum X_i &= X_A + P_1 + P_2' = -50 + 10 + 40 = 0; \\ \sum Y_i &= Y_A - Q - P_2'' + R_B = 7,3 - 20 - 69,3 + 82 = 0; \\ \sum M_{iA} &= M_A - P_1 \cdot 3 - Q \cdot 6 - P_2' \cdot 4 - P_2'' \cdot 10 - M + R_B \cdot 12 = \\ &= 219 - 30 - 120 - 160 - 693 + 984 = 0. \end{aligned}$$

Порівнюючи рішення цієї задачі, отримане шляхом застосування рівняння робіт, з рішенням, що могло б бути отримане при складанні рівнянь рівноваги розглянутої системи сил, слід ще раз відзначити наступні основні особливості рішення задач за допомогою принципу можливих переміщень:

1 Кожна складова будь-якої реакції в'язі визначається незалежно від інших реактивних сил.

2 Визначення складових реакцій зовнішніх в'язей (у розглянутому випадку опор  $A$  і  $B$ ) не вимагає визначення реакцій внутрішніх в'язей (шарніра  $C$ ).

Для системи, що складається з декількох тіл, визначати реакції опор за допомогою принципу можливих переміщень особливо зручно в тому випадку, коли потрібно визначити реакції не всіх опор, а лише одну або кілька реакцій.

### Приклад 2.8

Застосовуючи принцип можливих переміщень, визначити реакції опор складеної конструкції (рис. 2.11).

$$P_1 = 10 \text{ кН}, \quad P_2 = 6 \text{ кН}, \quad q = 2 \text{ кН/м}, \quad M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



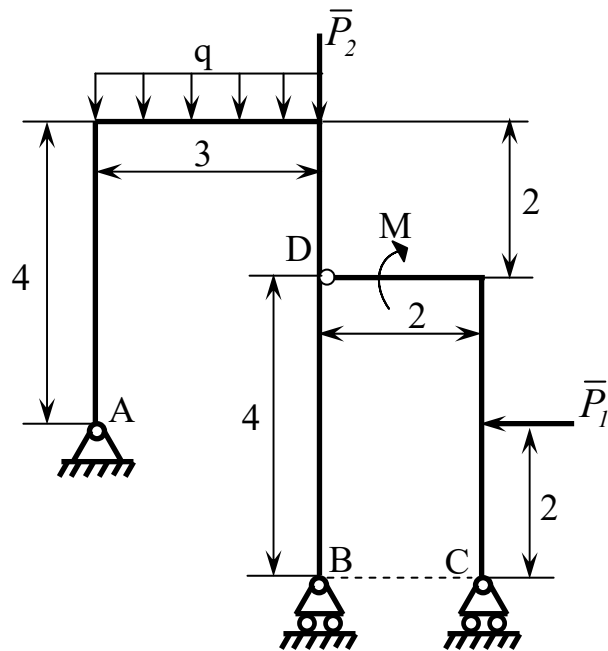


Рисунок 2.11

### Рішення

1) Замінімо рівномірно розподілене навантаження зосередженою силою  $Q = q \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН}$ , прикладеною в середині завантаженої ділянки.

Знайдемо  $Y_C$  (рис. 2.12, а), для чого слід відкинути опору  $C$ , замінивши її дію реакцією.

Можливим переміщенням буде поворот правої частини рами навколо шарніра  $D$  на кут  $\delta\varphi$ . Ліва частина рами залишається нерухомою.

Згідно з принципом можливих переміщень складемо рівняння робіт, враховуючи, що робота сили при обертанні тіла дорівнює добутку моменту сили відносно центра на кут повороту тіла:

$$(P_1 \cdot 2) \cdot \delta\varphi + M \cdot \delta\varphi - (Y_C \cdot 2) \cdot \delta\varphi = 0,$$

звідки

$$Y_C = \frac{2P_1 + M}{2} = \frac{20 + 10}{2} = 15 \text{ кН}.$$

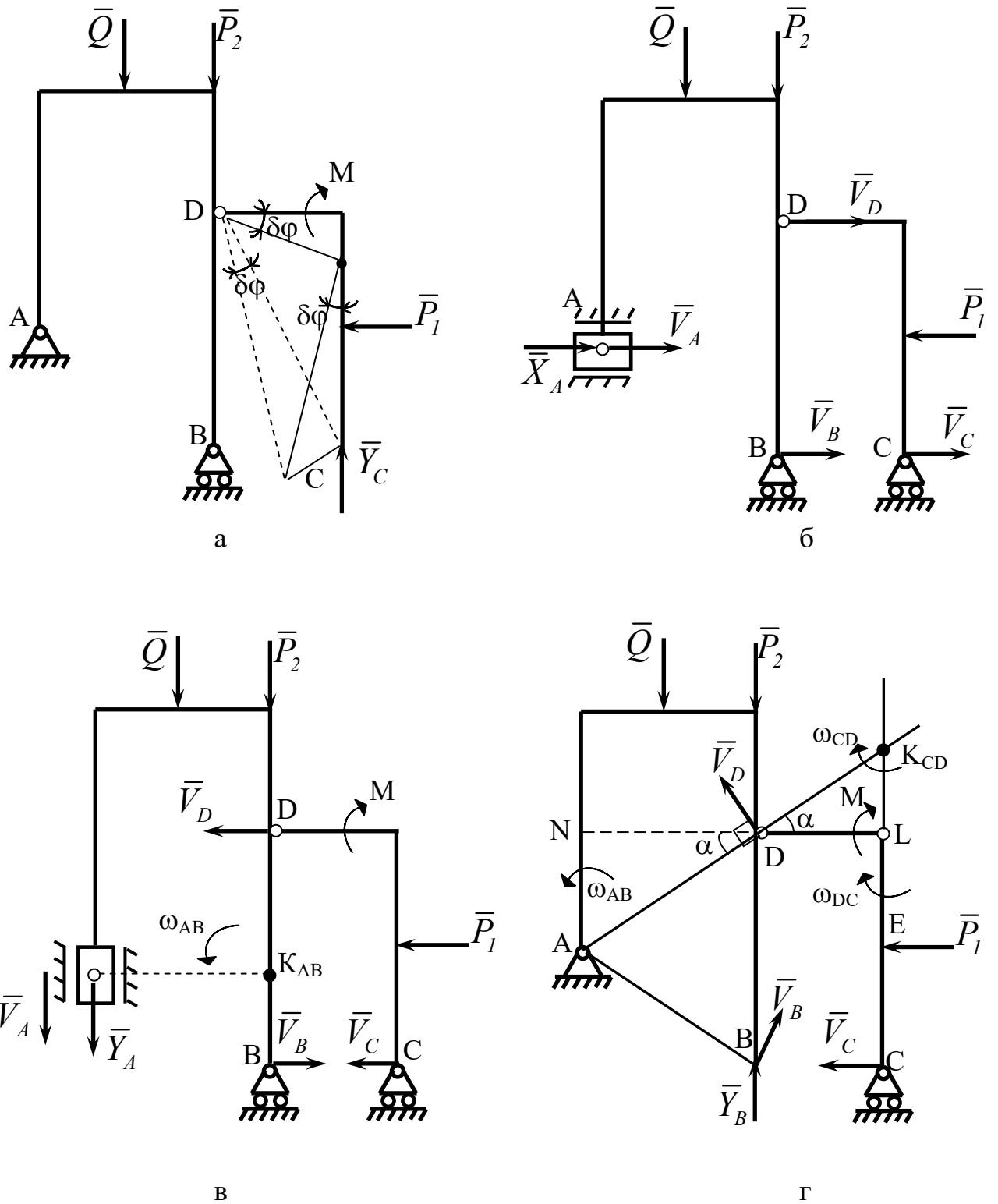


Рисунок 2.12

2) Знайдемо горизонтальну складову  $X_A$  реакції жорсткого кріплення (рис. 2.12, б).

Для цього викинемо в'язь, яка перешкоджає горизонтальному пере-

міщенню точки  $A$ , замінивши жорстке закріплення повзуном  $A$  в горизонтальних напрямних.

Для стаціонарних в'язей від принципу можливих переміщень можна перейти до принципу можливих швидкостей, який задається формулою

$$\sum \bar{F}_i \cdot \bar{V}_i = 0.$$

У даному випадку рама буде рухатися поступально, тому  $V_A = V_B = V_D = V_C$ . Складемо рівняння потужностей:

$$X_A \cdot V_A - P_l \cdot V_D = 0,$$

звідки

$$X_A = P_l = 10 \text{ кН.}$$

$$\sum \bar{P}_i \cdot \bar{V}_i = 0;$$

$$V_C = V_D = V_B = V_A;$$

$$X_A \cdot V_A - P_l \cdot V_D = 0;$$

звідки

$$X_A = P_l \Rightarrow X_A = 10 \text{ кН.}$$

3) Знайдемо вертикальну складову  $Y_A$  реакції жорсткого закріплення (рис. 2.12, в).

Замінімо жорстке закріплення повзуном  $A$  у вертикальних напрямних. На рисунку (2.12, в) зображені можливі швидкості точок  $A$  і  $B$ . На

перетині перепендикулярів до векторів  $\bar{V}_A$  і  $\bar{V}_B$  знаходиться миттєвий центр швидкостей т.  $K_{AB}$ . Права частина рами переміщується поступально із швидкістю  $\bar{V}_D = \bar{V}_C$  ( $\omega_{CD} = 0$ ).

Складемо рівняння потужностей:

$$Y_A \cdot V_A + Q \cdot 1,5\omega_{AB} + P_1 \cdot V_D = 0,$$

де

$$V_D = \omega_{AB} \cdot 2; \quad V_A = \omega_{AB} \cdot 3,$$

таким чином:

$$3Y_A \cdot \omega_{AB} + 1,5Q \cdot \omega_{AB} + 2P_1 \cdot \omega_{AB} = 0,$$

$$-Y_A = \frac{1,5Q + 2P_1}{3}, \quad -Y_A = \frac{9 + 20}{3} = \frac{29}{3} \text{ кН}.$$

4) Знайдемо  $Y_B$  (рис. 2.12, г). Відкидаємо рухомий циліндричний шарнір  $B$ . Замінюємо його дію реакцією  $\bar{Y}_B$ .

Можливим рухом лівої частини рами буде обертання навколо осі, яка пройде через т.  $A$ .

Права частина рами здійснює плоский рух, при цьому т.  $K_{CD}$  є миттєвим центром швидкостей.

Складемо рівняння потужностей:

$$Y_B \cdot 3 \cdot \omega_{AB} - Q \cdot 1,5 \cdot \omega_{AB} - P_2 \cdot 3 \cdot \omega_{AB} + \\ + M \cdot \omega_{CD} + P_1 \cdot E \cdot K_{CD} \cdot \omega_{CD} = 0,$$

$$V_D = \omega_{AB} \cdot AD = \omega_{CD} \cdot D \cdot K_{CD}, \quad \omega_{CD} = \frac{AD}{D \cdot K_{CD}} \cdot \omega_{AB},$$

однак з подібності трикутників ( $\square ADN$  і  $\square DLK_{CD}$ ) видно, що

$$\frac{AD}{D \cdot K_{CD}} = \frac{AN}{K_{CD} \cdot L} = \frac{DN}{DL} = \frac{3}{2}.$$

Тоді

$$\omega_{CD} = 1,5 \omega_{AB}, \quad K_{CD} L = \frac{AN}{1,5} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3} \text{ м};$$

$$K_{CD} E = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \text{ м}.$$

Таким чином,

$$3Y_B - 1,5Q - 3P_2 + 1,5M + P_1 \cdot \frac{10}{3} \cdot 1,5 = 0,$$

$$Y_B = \frac{1,5Q + 3P_2 - 1,5M - 5P_1}{3} = \\ = \frac{1,5 \cdot 6 + 3 \cdot 6 - 1,5 \cdot 10 - 5 \cdot 10}{3} = -\frac{38}{3} = -12,7 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum R_x = X_A - P_1 = 10 - 10 = 0 \quad \text{– вірно,}$$

$$\sum R_y = Q + P_2 + Y_B - Y_A - Y_C = 6 + 6 + 12,7 - 15 - 9,7 = 0. \quad \text{– вірно.}$$

### 3 ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ

Загальне рівняння динаміки у випадку руху механічної системи об'єднує принцип Даламбера з принципом можливих переміщень Лагранжа і зветься ще принципом Даламбера – Лагранжа.

Запишемо принцип Даламбера для механічної системи:

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i + \bar{\Phi}_i = 0, \quad (3.1)$$

де  $\bar{F}_i$  – рівнодіюча активних сил;

$\bar{R}_i$  – рівнодіюча реакцій в'язей;

$\bar{\Phi}_i$  – умовно прикладена до  $i$ -ої точки сила інерції, яка дорівнює:

$$\bar{\Phi}_i = -m_i \bar{a}_i,$$

де  $m_i$  – маса  $i$ -ої точки;

$\bar{a}_i$  – прискорення  $i$ -ої точки.

Помноживши рівняння (3.1) скалярно на можливе переміщення  $i$ -ої точки  $\delta \bar{r}_i$ , отримаємо:

$$\bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i + \bar{R}_i \cdot \delta \bar{r}_i + \bar{\Phi}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0. \quad (3.2)$$

Для механічної системи з ідеальними в'язами

$$\bar{R}_i \cdot \delta r_i = \delta A_i^R = 0,$$

де  $\delta A_i^R$  – можлива робота реакцій в'язей на можливому переміщенні точки  $\delta \bar{r}_i$ .

Таким чином рівняння (3.2) спрощується і має вигляд

$$\sum_i (\bar{F}_i + \bar{\Phi}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0. \quad (3.3)$$

Якщо рівняння (3.1) помножити скалярно на можливу швидкість точки  $\delta \bar{V}_i$ , тоді отримаємо таке рівняння:

$$\sum_i (\bar{F}_i + \bar{\Phi}_i) \cdot \delta \bar{V}_i = 0. \quad (3.4)$$

Загальне рівняння динаміки дозволяє вирішувати задачі двох типів:

1 Задачі, в яких необхідно встановити умови відносної рівноваги системи.

2 Задачі, в яких потрібно визначити прискорення точок системи.

При складанні рівнянь у випадку обертання тіла навколо нерухомої осі та плоского руху тіла, для спрощення знаходження знаків, необхідно:

1 Ось спрямовувати вздовж осі обертання, визначивши додатній відлік кутів.

2 Осі  $X$  і  $Y$  розміщувати у площині рисунка так, щоб разом з  $Z$  була створена права система осей.

3 Проекції головних векторів сил інерції на осі координат відзначити співвідношеннями:

$$\Phi_x = \frac{P}{g} a_x; \quad \Phi_y = \frac{P}{g} a_y.$$

4 Головний момент сил інерції відносно точки або осі визначати відповідно:

$$\bar{M}_0^\phi = -I_0 \bar{\varepsilon}_0; \quad M_z^\phi = -I_z \varepsilon_z,$$

де  $I_0$ ,  $I_z$  – відповідні моменти інерції тіла.

Розглянемо деякі приклади розв'язування задач за допомогою загального рівняння динаміки.

### Приклад 3.1

Відцентровий регулятор складається з двох кульок:  $A$  та  $A_1$  (рис. 3.1), вагою  $P$  кожна, розмірами яких можна знехтувати. Кульки закріплені на кінцях колінчатих прямокутних важелів, які мають шарнірні опори  $C$  та  $C_1$  на перекладині  $COC_1$ , з'єднані незмінно з віссю регулятора. Муфта  $D$  вагою  $P_1$  віджимается вниз пружиною, а з іншої сторони підтримується роликками  $B$  та  $B_1$  важелів регулятора.

Визначити жорсткість  $C$  пружини, якщо при заданій сталій кутовій швидкості  $\omega$  кут відхилення стрижнів  $CA$  та  $C_1A_1$  від вертикалі дорівнює  $\varphi$ . Дані відстані:  $OC = l$ ,  $AC = A_1C_1 = a$ ,  $CB = C_1B_1 = b$  і довжина недеформованої пружини  $d_0$ . Висота муфти дорівнює  $h$ .

### Рішення

Заданими силами, діючими на систему, являються вага кульок і муфти, а також сила пружності пружини



$$Q = c\lambda,$$

де  $\lambda$  – деформація стиснутої пружини. Крім того, в точках  $A$  і  $A_1$  прикладені центробіжні сили інерції:

$$\Phi = \Phi_1 = \frac{P}{g} R \omega^2,$$

де  $R$  – відстань від центра кожного із шарів до осі обертання  $Y$ .

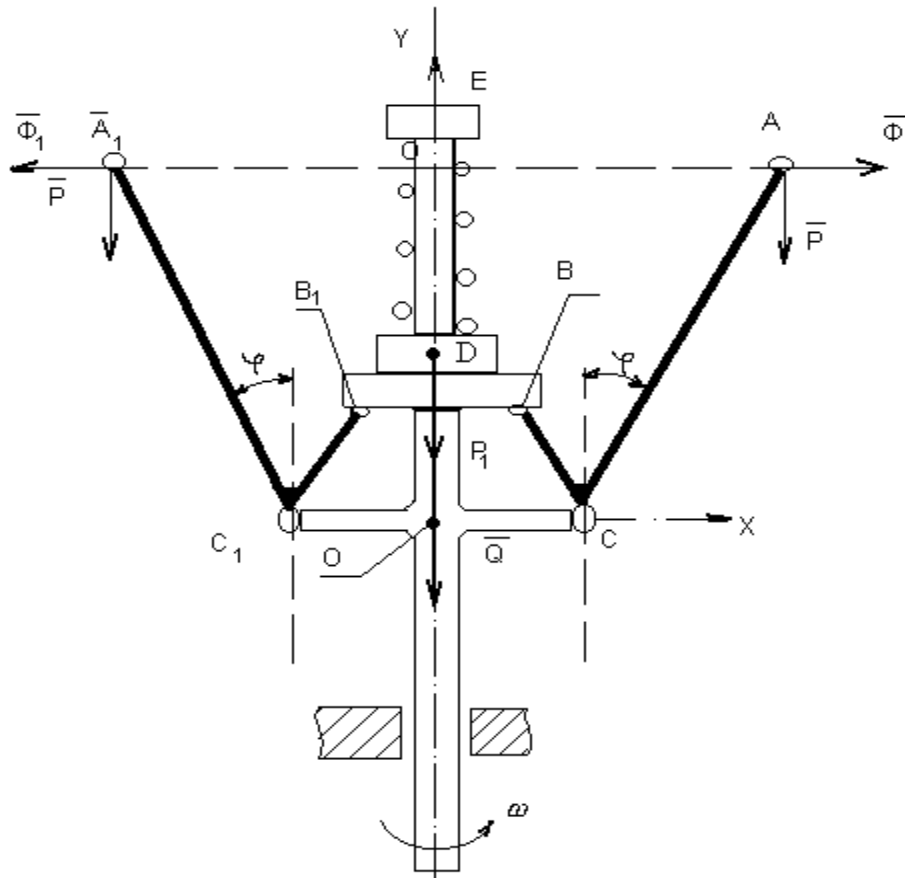


Рисунок 3.1

Відповідно до загального рівняння динаміки сума робіт всіх сил на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю. Таким чином, користуючись аналітичним виразом рівняння (3.4), будемо мати:

$$\Phi \delta x_A - \Phi_1 \delta x_{A_1} - P \delta y_A - P \delta y_{A_1} - (P_1 + Q) \delta y_D = 0, \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} x_A = -x_{A1} &= l + a \sin \varphi; \\ y_A = y_{A1} &= a \cos \varphi; \\ y_D &= b \sin \varphi + \frac{h}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Запишемо варіації:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_A = -\delta x_{A1} &= a \cos \varphi \delta \varphi; \\ \delta y_A = y_{A1} &= -a \sin \varphi \delta \varphi; \\ \delta y_D &= b \cos \varphi \delta \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Крім того,

$$R = x_A = l + a \sin \varphi, \quad (3.8)$$

а з цього

$$\Phi = \Phi_1 = \frac{P}{g} R \omega^2 = \frac{P}{g} (l + a \sin \varphi) \omega^2. \quad (3.9)$$

Таким чином, рівняння ( 3.5 ) з урахуванням ( 3.7 ), (3.8) і (3.9) набуде наступного вигляду:

$$\left( 2 \frac{P}{g} (l + a \sin \varphi) \omega^2 a \cos \varphi + 2 P a \sin \varphi - (P_1 + Q) b \cos \varphi \right) \delta \varphi = 0,$$

відкіля, урахувавши, що  $\delta\varphi \neq 0$ , знаходимо:

$$bQ\cos\varphi = 2Pa\left(\frac{l + a\sin\varphi}{g}\omega^2\cos\varphi + \sin\varphi\right) - bP_1\cos\varphi. \quad (3.10)$$

Таким чином, з рівняння (3.10) маємо:

$$Q = 2P\frac{a}{b}\left(\frac{l + a\sin\varphi}{g}\omega^2 + \operatorname{tg}\varphi\right) - P_1. \quad (3.11)$$

Деформація пружини визначається формулою

$$\lambda = d_0 - (d - h - b\sin\varphi). \quad (3.12)$$

Відповідно до виразів (3.11) і (3.12) жорсткість пружини є такою:

$$C = \frac{Q}{\lambda} = \frac{Q}{d_0 - d + h + b\sin\varphi}.$$

### Приклад 3.2

До кінців нерозтяжної і невагомої нитки прикріплений вантаж  $A$  вагою  $P_1$ , який знаходиться на горизонтальній площині, і вантаж  $B$  вагою  $P_2$ . Ці вантажі розташовані на похилій площині, яка складає з горизонтом кут  $\alpha$  (рис. 3.2). Від вантажу  $A$  нитка проходить через нерухомий блок  $C$ , огинає рухомий блок  $D$ , а потім через блок  $E$ , який знаходиться на одній осі з блоком  $C$ , йде до вантажу  $B$  паралельно скату нахиленої площини.

До рухомого блока  $D$  підвішений вантаж  $K$  вагою  $P_3$ . Коефіцієн-

ти тертя вантажу  $A$  об горизонтальну площину та вантажу  $B$  об похилу площину відповідно дорівнюють  $f_1$  і  $f_2$ .

Визначити, нехтуючи масами блоків, прискорення вантажів за умови, що вантаж  $K$  спускається, а вантажі  $A$  і  $B$  рухаються, наближаючись до блоків  $C$  і  $E$ .

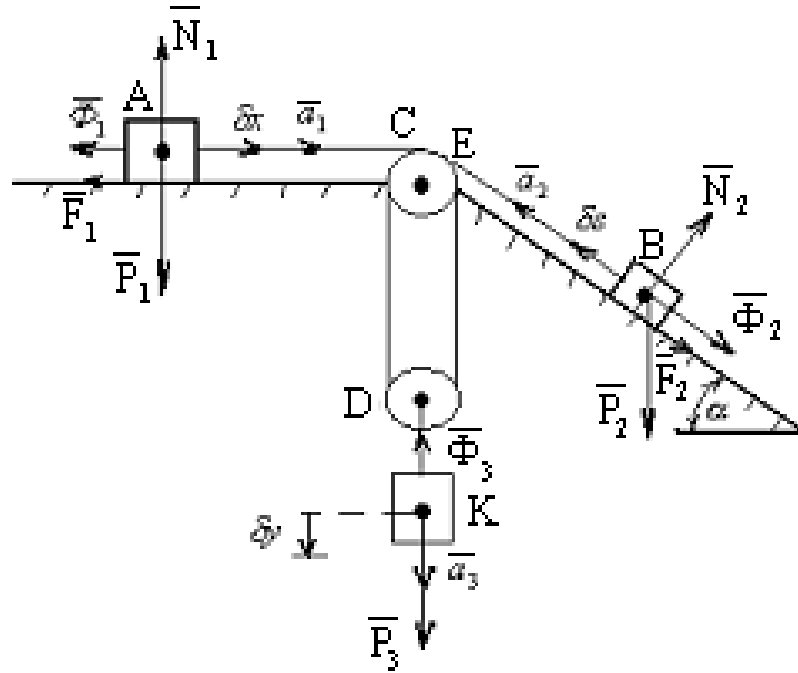


Рисунок 3.2

**Рішення**

Вантажі  $A$ ,  $B$  і  $K$  виконують поступальний рух. Визначимо їх розташування відповідно до координат центрів мас  $X$ ,  $S$  і  $Y$  від початкових положень їх центрів. На рисунку 3.2 ці координати не показані, а показані їх відповідні варіації (можливі переміщення)  $\delta x$ ,  $\delta s$  і  $\delta y$ .

Нерозтяжна нитка накладає на вибрані координати такі умови:

$$y = (x + s)/2. \tag{3.13}$$

Так як три координати визначаються одним рівнянням, то незалежними із них є дві. З цього система має два ступеня вільності.

Диференціюємо рівняння (3.13) двічі за часом:

$$\ddot{y} = (\ddot{x} + \ddot{s}) / 2,$$

відкіля алгебраїчні значення прискорень вантажів мають наступну залежність:

$$a_3 = (a_1 + a_2) / 2. \quad (3.14)$$

У рівнянні (3.14) кожне із прискорень додатне, якщо його напрямок співпадає з напрямком вибраної осі координат і від'ємне в протилежному випадку.

Прикладаємо до системи задані сили:  $P_1, P_2, P_3$ , а також сили тертя  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2$ , відносячи їх до заданих сил (див. рис. 3.2). Значення кожної сили тертя дорівнює добутку коефіцієнта тертя і нормальній реакції між тілами і площиною:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= f_1 N_1 = f_1 P_1; \\ F_2 &= f_2 N_2 = f_2 P_2 \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Прикладаємо умовно в центрі мас кожного вантажу рівнодіючу сил інерції його точок. Направимо ці сили протилежно прискоренням і визначимо їх значення:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= m_1 a_1 = \frac{P_1}{g} a_1; \\ \Phi_2 &= m_2 a_2 = \frac{P_2}{g} a_2; \\ \Phi_3 &= m_3 a_3 = \frac{P_3}{g} a_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Відповідно до формули (3.14) можливі переміщення мають наступні

залежності:

$$\left. \begin{aligned} \delta y &= \frac{\delta x + \delta s}{2}; \\ \delta s &= 2\delta y - \delta x. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Складаємо загальне рівняння динаміки механічної системи з урахуванням (3.15), (3.16) і (3.17)

$$-(\Phi_1 + F_1)\delta x + (P_3 - \Phi_3)\delta y - (P_2 \sin \alpha + \Phi_2 + F_2)\delta s = 0$$

відкіля

$$-\left(\frac{P_1}{g}a + f_1 P_1\right)\delta x + \left(P_3 - \frac{P_3}{g}\frac{a_1 + a_2}{2}\right) - \left(P_2 \sin \alpha + \frac{P_2}{g}a_2 + f_2 P_2 \cos \alpha\right)(2\delta y - \delta x) = 0,$$

або

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{P_1}{g}a - f_1 P_1 + P_2 \sin \alpha + \frac{P_2}{g}a_2 + f_2 P_2 \cos \alpha\right)\delta x + \\ &+ \left(P_3 - \frac{P_3}{g}\frac{a_1 + a_2}{2} - 2P_2 \sin \alpha - \frac{2P_2}{g}a_2 - 2f_2 P_2 \cos \alpha\right)\delta y = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Так як рівняння (3.18) справедливе при будь-яких значеннях  $\delta x$  і  $\delta y$ , то коефіцієнти при цих прирощеннях загальних координат дорівнюють нулю і, таким чином:

$$\left. \begin{aligned} P_1 a_1 - P_2 a_2 &= (P_2(\sin\alpha + f_2 \cos\alpha) - f_1 P_1)g; \\ P_3 a_1 + (4P_2 + P_3) a_2 &= (2P_3 - 4P_2(\sin\alpha + f_2 \cos\alpha))g. \end{aligned} \right\} (3.19)$$

Із системи рівнянь (3.19) розрахуємо відносно  $a_1$  і  $a_2$ :

$$a_1 = \frac{P_2 P_3 (2 + \sin\alpha + f_2 \cos\alpha) - f_1 P_1 (4P_2 P_3)}{P_1 (4P_2 + P_3) + P_2 P_3} g, \quad (3.20)$$

$$a_2 = \frac{P_1 P_3 (2 + f_1) - P_2 (4P_1 + P_3) (\sin\alpha + f_2 \cos\alpha)}{P_1 (4P_2 + P_3) + P_2 P_3} g. \quad (3.21)$$

Прискорення вантажу  $K$  визначимо з формули (3.14):

$$\begin{aligned} a_3 &= P_3 (P_1 + P_2) - 2P_1 P_2 (f_1 + \sin\alpha + f_2 \sin\alpha), \\ a_3 &= \frac{P_3 (P_1 + P_2) - 2P_1 P_2 (f_1 + \sin\alpha + f_2 \sin\alpha)}{P_1 (4P_2 + P_3) + P_2 P_3} g. \end{aligned} \quad (3.22)$$

### Приклад 3.3

Механізм складається з трьох тіл (рис.3.3), розташованих в горизонтальній площині. Кочення колеса 3 здійснюється без просковзування. Тертя кочення і сили опору в підшипниках не враховуються. Колеса вважаються суцільними однорідними дисками. Кривошип 1 розглядається як тонкий однорідний стержень.

Дано: маси тіл:  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m$ ,  $m_3 = 3m$ ;

моменти:  $M_1$  (прикладений до водила) і  $M_2$ ;

узагальнені координати:  $q_1 = \varphi_1$ ,  $q_2 = \varphi_2$ ;

початкові умови:

$$\varphi_{10} = 0, \quad \dot{\varphi}_{10} = 0, \quad \varphi_{20} = 0, \quad \dot{\varphi}_{20} = 0.$$

Знайти рівняння руху системи в узагальнених координатах, тобто  $\varphi_1(t)$  і  $\varphi_2(t)$ .

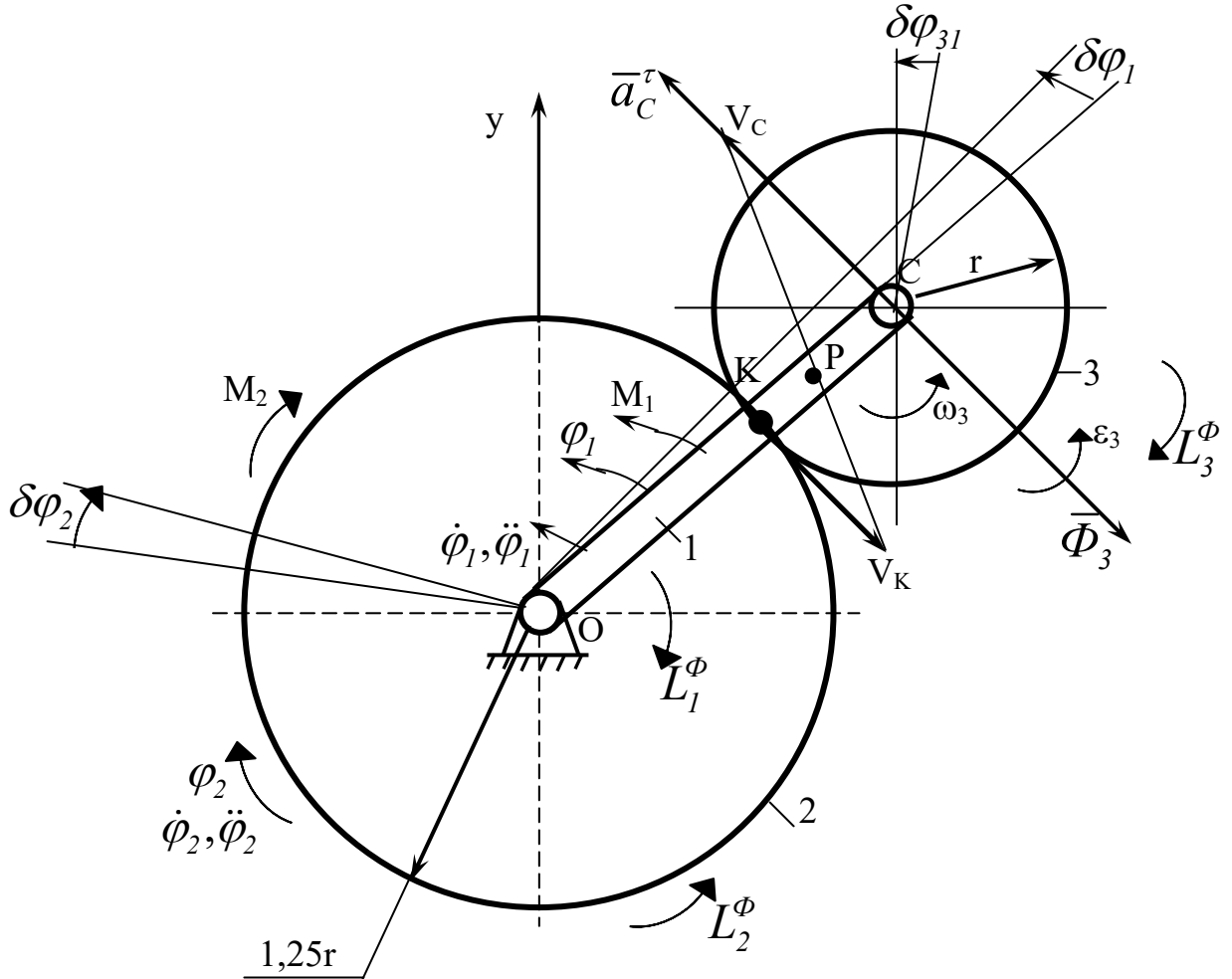


Рисунок 3.3

### Рішення

Виразимо швидкості ланок через узагальнені швидкості:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1, \quad \omega_2 = \dot{\varphi}_2, \quad V_k = \omega_2 \cdot 1,25r, \quad V_c = \omega_1 \cdot OC = \dot{\varphi}_1 \cdot 2,25r,$$

точка  $P$  – МЦШ тіла 3.



$$\omega_3 = \frac{V_C + V_k}{CK} = \frac{\dot{\varphi}_1 \cdot 2,25 + \dot{\varphi}_2 \cdot 1,25}{r} \cdot r = 2,25\dot{\varphi}_1 + 1,25\dot{\varphi}_2.$$

Аналогічно виразимо прискорення:

$$\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1, \quad \varepsilon_2 = \ddot{\varphi}_2, \quad \varepsilon_3 = 2,25\ddot{\varphi}_1 + 1,25\ddot{\varphi}_2, \quad a_c^\tau = \ddot{\varphi}_1 \cdot 2,25r.$$

Сили ваги не розглядаємо, тому що вони роботи не виконують (сили ваги перпендикулярні до площини руху).

Сили інерції і моменти сил інерції:

$$\bar{L}_1^\Phi = -J_{10}\bar{\varepsilon}_1; \quad J_{10} = \frac{m_1 OC^2}{3} = \frac{m(2,25r)^2}{3} = 1,6875mr^2;$$

$$L_1^\Phi = 1,6875mr^2 \ddot{\varphi}_1.$$

$$\bar{L}_2^\Phi = -J_2\bar{\varepsilon}_2; \quad J_2 = \frac{m_2 (1,25)^2}{2} = \frac{2m(1,25r)^2}{2} = 1,5625mr^2;$$

$$L_2^\Phi = 1,5625mr^2 \ddot{\varphi}_2.$$

$$\bar{\Phi}_3 = -m_3 \bar{a}_C^\tau; \quad \Phi_3 = 3m \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot 2,25r = 6,75\ddot{\varphi}_1 mr;$$

$$\bar{L}_3^\Phi = -J_{3C}\bar{\varepsilon}_3; \quad J_3 = \frac{m_3 r^2}{2} = \frac{3}{2}mr^2;$$

$$L_3^\Phi = \frac{3}{2}mr^2 \cdot (2,25\ddot{\varphi}_1 + 1,25\ddot{\varphi}_2).$$

Задамо ланці 1 можливе переміщення  $\delta\varphi_1$ . При цьому вважаємо, що  $\varphi_2 = const$ . Складемо загальне рівняння динаміки:

$$\sum \delta A(\bar{F}_k) + \sum \delta A(\bar{\Phi}_k) = 0;$$

$$M_1 \delta \varphi_1 - L_1^\Phi \delta \varphi_1 - \Phi_3 \delta S_C - L_3^\Phi \delta \varphi_3 = 0.$$

Аналогічно швидкостям маємо:

$$\delta s_C = \delta \varphi_1 \cdot 2,25r; \quad \delta \varphi_3 = 2,25\delta \varphi_1 + 1,25\delta \varphi_2 = 2,25\delta \varphi_1,$$

тоді

$$M_1 \delta \varphi_1 - L_1^\Phi \delta \varphi_1 - \Phi_3 \cdot 2,25r \delta \varphi_1 - L_3^\Phi \cdot 2,25\delta \varphi_1 = 0.$$

В отримане рівняння підставимо сили інерції і моменти сил інерції:

$$M_1 - 1,6875mr^2 \ddot{\varphi}_1 - 6,75\ddot{\varphi}_1 mr \cdot 2,25r -$$

$$-\frac{3}{2}mr^2 (2,25\ddot{\varphi}_1 + 1,25\ddot{\varphi}_2) \cdot 2,25 = 0;$$

$$\frac{M_1}{mr^2} = 24,46875\ddot{\varphi}_1 + 4,21875\ddot{\varphi}_2. \quad (3.23)$$

Задамо тілу 2 можливе переміщення  $\delta \varphi_2$ , при цьому вважаємо  $\delta \varphi_1 = 0$ . Одержимо:

$$\delta s_C = 0; \quad \delta \varphi_3 = (2,25\delta \varphi_1 + 1,25\delta \varphi_2) = 1,25\delta \varphi_2.$$

Складемо загальне рівняння динаміки:

$$M_2 \delta \varphi_2 - L_2^\Phi \delta \varphi_2 - L_3^\Phi \delta \varphi_3 = 0;$$

$$M_2 \delta \varphi_2 - 1,5625 \ddot{\varphi}_2 m r^2 \cdot \delta \varphi_2 - (2,25 \ddot{\varphi}_1 + 1,25 \ddot{\varphi}_2) \times \\ \times \frac{3}{2} m r^2 \cdot 1,25 \delta \varphi_2 = 0;$$

$$\frac{M_2}{m r^2} = 4,21875 \ddot{\varphi}_1 + 3,90625 \ddot{\varphi}_2. \quad (3.24)$$

Одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 24,46875 \ddot{\varphi}_1 + 4,21875 \ddot{\varphi}_2 = \frac{M_1}{m r^2}, \\ 4,21875 \ddot{\varphi}_1 + 3,90625 \ddot{\varphi}_2 = \frac{M_2}{m r^2}. \end{cases}$$

Вирішуємо систему:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{0,04859 M_1 - 0,05424 M_2}{m r^2};$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{0,31458 M_2 - 0,05424 M_1}{m r^2}.$$

$\ddot{\varphi}_1 = const$ ;  $\ddot{\varphi}_2 = const$ . Інтегруємо:

$$\dot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_1 t + C_1; \text{ початкові умови: } \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad C_1 = 0;$$

$$\varphi_1(t) = \ddot{\varphi}_1 \frac{t^2}{2} + C_2; \text{ початкові умови: } \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad C_2 = 0;$$

$$\dot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_2 t + C_3; \text{ початкові умови: } \dot{\varphi}_2(0) = 0, \quad C_3 = 0;$$

$$\varphi_2 = \ddot{\varphi}_2 \frac{t^2}{2} + C_4; \text{ початкові умови: } \varphi_2(0) = 0, \quad C_4 = 0.$$

Остаточно:

$$\varphi_1(t) = \frac{0,04859M_1 - 0,05424M_2}{mr^2} \cdot \frac{t^2}{2};$$

$$\varphi_2(t) = \frac{0,31458M_2 - 0,05424M_1}{mr^2} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

### Приклад 3.4

Через блок  $O$  з центром на початку координат (рис. 3.4) перекинутий трос довжини  $l_1$ , на одному кінці якого закріплено тіло  $M_1$  маси  $m_1$ , а на іншому – блок  $M_2$  маси  $m_2$ ; через блок  $M_2$  перекинутий трос довжини  $l_2$ , на кінцях якого підвішені вантажі  $M_3$  і  $M_4$  масами  $m_3$  і  $m_4$ . Дослідити рух системи, вважаючи розміри блоків зневажено малими і в'язкі ідеальними.

Позначимо ординати вантажу  $M_1$ , блоку  $M_2$ , вантажів  $M_3$  і  $M_4$  відповідно через  $y_1, y_2, y_3, y_4$ , а їхні прискорення – через  $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_4$ .

Приєднавши до сил ваги, що задаються:  $\bar{G}_1 = m_1 \bar{g}$   $\bar{G}_2 = m_2 \bar{g}$ ,

$\bar{G}_3 = m_3 \bar{g}$ ,  $\bar{G}_4 = m_4 \bar{g}$ , сили інерції  $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \bar{\Phi}_3, \bar{\Phi}_4$  з проекціями

$-m_1 \ddot{y}_1, -m_2 \ddot{y}_2, -m_3 \ddot{y}_3, -m_4 \ddot{y}_4$  на вісь  $Oy$ , зможемо розглядати дану систему блоків і вантажів як невільную систему, що знаходиться в рівно-

вазі.

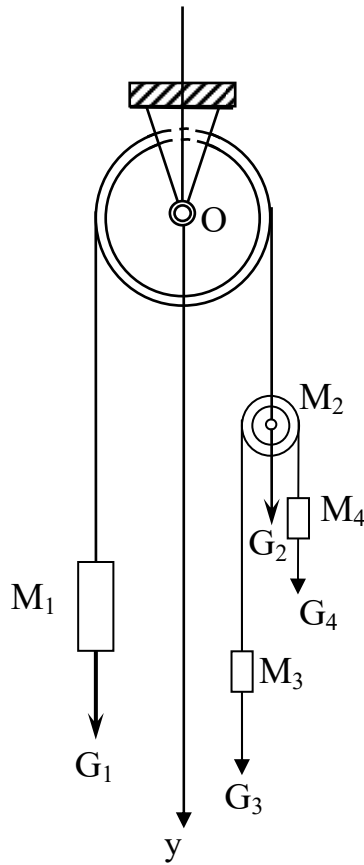


Рисунок 3.4

### Рішення

Умову рівноваги запишемо у формі рівняння принципу можливих переміщень:

$$\begin{aligned} & (m_1 g - m_1 \ddot{y}_1) \delta y_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{y}_2) \delta y_2 + \\ & + (m_3 g - m_3 \ddot{y}_3) \delta y_3 + (m_4 g - m_4 \ddot{y}_4) \delta y_4 = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ми склали загальне рівняння динаміки для даного випадку. Можливі переміщення  $\delta y_1, \delta y_2, \delta y_3, \delta y_4$ , підлеглі двом умовам:

$$\delta y_1 + \delta y_2 = 0, \quad \delta y_3 + \delta y_4 - 2\delta y_2 = 0,$$

які легко одержати, варіюючи очевидні рівняння в'язей

$$y_1 + y_2 = l_1,$$

$$y_3 - y_2 + y_4 - y_2 = y_3 + y_4 - 2y_2 = l_2.$$

Система має два ступені свободи. Виразимо два яких-небудь можливих переміщення, наприклад  $\delta y_1$  і  $\delta y_3$ , через незалежні  $\delta y_2$  і  $\delta y_4$ :

$$\delta y_1 = -\delta y_2, \quad \delta y_3 = 2\delta y_2 - \delta y_4,$$

підставимо в (3.25), зберемо члени з незалежними переміщеннями  $\delta y_2$ ,  $\delta y_4$  і дорівнюємо коефіцієнти при них нулю; тоді будемо мати:

$$m_1 \ddot{y}_1 - m_2 \ddot{y}_2 - 2m_3 \ddot{y}_3 = m_1 g - m_2 g - 2m_3 g,$$

$$m_3 \ddot{y}_3 - m_4 \ddot{y}_4 = m_3 g - m_4 g.$$

До цих двох рівнянь з чотирма невідомими  $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_4$  приєднаємо ще два рівняння:

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0,$$

$$\ddot{y}_3 + \ddot{y}_4 - 2\ddot{y}_2 = 0,$$

одержувані дворазовим диференціюванням рівнянь в'язей.

З цієї системи чотирьох рівнянь з чотирма невідомими знаходимо:

$$\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2 = \frac{(m_3 - m_4)^2 + (m_3 + m_4)(m_1 - m_2 - m_3 - m_4)}{2m_4(m_4 - m_3) - (2m_4 + m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} g,$$

$$\ddot{y}_3 = \frac{l}{(m_3 + m_4)} = \left[ m_3 - m_4 + \right. \\ \left. + 2m_4 \frac{(m_3 - m_4)^2 + (m_3 + m_4)(m_1 - m_2 - m_3 - m_4)}{2m_4(m_4 - m_3) - (2m_4 + m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \right] g, \quad (3.26)$$

$$\ddot{y}_4 = 2\ddot{y}_2 - \ddot{y}_3.$$

Підберемо маси тіл так, щоб при прискореному русі вантажів  $M_3$  і  $M_4$  блок  $M_2$  і вантаж  $M_1$  залишалися нерухомими. Для цього, відповідно до першої рівності (3.26), повинне виконуватися рівняння

$$(m_3 - m_4)^2 + (m_3 + m_4)(m_1 - m_2 - m_3 - m_4) = 0$$

і, крім того, із рівності (3.26) випливає, що  $m_3 \neq m_4$ , тому що в протилежному випадку система в цілому буде в рівновазі, що суперечить прийнятій умові прискореного руху вантажів  $M_3$  і  $M_4$ .

Знаходимо реакції в'язей або за допомогою методу перетину тросів, або методом множників.

#### 4 РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА

Відповідно до загального рівняння динаміки для ідеальних в'язей

$$\sum_i (\bar{F}_i - \bar{\Phi}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0, \quad (4.1)$$

де

$$\delta \bar{r}_i = \sum_k \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k . \quad (4.2)$$

Якщо підставити значення  $\delta \bar{r}_i$  із формули (4.2) в рівняння (4.1), то отримаємо рівняння Лагранжа другого роду, яке має такий вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k , \quad (4.3)$$

де  $T$  – кінетична енергія механічної системи в узагальнених координатах;

$\dot{q}_k$  – узагальнена швидкість за  $k$ -ю узагальненою координатою;

$q_k$  –  $k$ -та узагальнена координата;

$Q_k$  – узагальнена сила за  $k$ -ю узагальненою координатою.

Для складання рівняння (4.3) необхідно діяти за таким планом:

- 1 Визначити кількість ступенів вільності матеріальної системи.
- 2 Вибрати систему координат і ввести незалежні узагальнені координати.
- 3 Записати кінетичну енергію системи як функцію узагальнених координат і швидкостей:

$$T = f(q_k, \dot{q}_k). \quad (4.4)$$

4 Виконати необхідні математичні дії над функцією (4.4) відповідно до рівняння (4.3).

5 Визначити узагальнені сили за формулою

$$Q_k = \frac{(\sum_i \delta A_i)_k}{\delta q_k} , \quad (4.5)$$



де  $(\sum_i \delta A_i)_k$  – сума можливих робіт за  $k$ -ю узагальненою координатою;

натою;

$\delta q_k$  – приріст  $k$ -ї узагальненої координати.

У випадку потенційних сил узагальнену силу краще визначити за формулою

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \quad (4.6)$$

де  $\Pi$  – потенційна сила як функція узагальненої координати  $q_k$ .

6 Скласти рівняння Лагранжа відповідно до рівняння (див.4.3)

Якщо кінематика руху системи є складною, то знаходження кінетичної енергії слід виконувати відповідно до теореми Кеніга:

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + T_c,$$

де  $T_c$  – кінетична енергія руху системи відносно центра мас.

У випадку потенційних сил рівняння Лагранжа у формі (4.3) спрощується:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (4.7)$$

де  $L=T-\Pi$  – функція Лагранжа.

Розглянемо дослідження руху механічних систем за допомогою рівняння Лагранжа другого роду на наступних прикладах.

### Приклад 4.1

У механізмі фрикційної передачі колесу 2 надається обертання колесом 1, яке має горизонтальну вісь обертання, що проходить через вісь колеса 2 (рис. 4.1). На ведуче колесо 1 діє обертальний момент  $M_1$ , а на ведене колесо 2 момент опору  $M_2$ . Вага колеса 1 дорівнює  $P_1$ , а його радіус –  $R_1$ . Вага колеса 2 дорівнює  $P_2$ , а його радіус –  $R_2$ . Колеса вважати однорідними дисками. Відстань від центра  $O$  колеса 2 до точки дотику коліс змінюється за законом  $R = R(t)$ .

Скласти диференціальне рівняння обертання колеса 2.

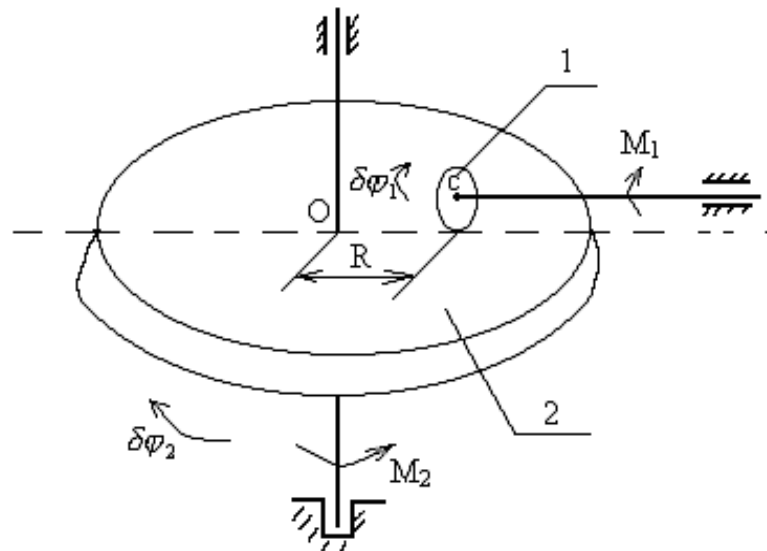


Рисунок 4.1

### Рішення

Ця система має один ступінь вільності.  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  – кути обертання коліс, притому

$$R_1\varphi_1 = R_2\varphi_2. \quad (4.8)$$

Кінетична енергія системи складається із кінетичних енергій двох тіл:

$$T = T_1 + T_2, \quad (4.9)$$

де

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} V_c^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2. \quad (4.10)$$

У формулі (4.10)

$$V_c = \dot{R}, \quad \text{а} \quad \omega_1 = \dot{\varphi}_1.$$

Із формули (4.8) маємо:  $\varphi_1 = \frac{R_2}{R_1} \varphi_2$  або після диференціювання

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{R_2}{R_1} \dot{\varphi}_2. \quad (4.11)$$

Крім того,

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} R_1^2. \quad (4.12)$$

Використовуючи вирази (4.11) і (4.12), перепишемо формулу (4.10):

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} \dot{R}^2 + \frac{1}{4} \frac{P_1}{g} R_2^2 \dot{\varphi}_2^2. \quad (4.13)$$

Кінетична енергія другого тіла

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \quad \text{або} \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2,$$

де

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} R_2^2.$$

Таким чином,

$$T_2 = \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} R_2^2 \dot{\varphi}_2^2. \quad (4.14)$$

Формули (4.13) і (4.14) підставимо до формули (4.9):

$$T = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} \dot{R}^2 + \frac{1}{4g} (P_1 R^2 + P_2 R_2^2) \cdot \dot{\varphi}_2^2. \quad (4.15)$$

Визначимо похідні від кінетичної енергії:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \frac{1}{2g} (P_1 R^2 + P_2 R_2^2) \dot{\varphi}_2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \frac{1}{2g} (P_1 R^2 + P_2 R_2^2) \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{g} P_1 R \dot{R} \dot{\varphi}_2; \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

$$\left( \sum_i \delta A_i \right) \varphi_2 = -M_2 \delta \varphi_2 + M_1 \delta \varphi_1 = \left( -M_2 + \frac{R}{R_1} M_1 \right) \delta \varphi_2;$$

$$Q\varphi_2 = \frac{(\sum \delta A_i)\varphi_2}{\delta\varphi_2} = \frac{R}{R_1}M_1 - M_2. \quad (4.17)$$

Складемо рівняння Лагранжа завдяки результатам формул (4.16), (4.17):

$$(P_1R^2 + P_2R_2^2)\ddot{\varphi}_2 + 2P_1R\dot{R}\dot{\varphi}_2 = 2g\left(\frac{R}{R_1}M_1 - M_2\right).$$

Якщо припустити, що  $R = R_0 = const$ , то

$$\varepsilon_2 = \ddot{\varphi}_2 = \frac{2g(R_0M_1 - R_1M_2)}{R_1(P_1R_0^2 + P_2R_2^2)}.$$

#### Приклад 4.2

До кривошипа  $OA$  епіциклічного механізму прикладений сталий обертальний момент  $M$  (рис. 4.2). Визначити кутове прискорення кривошипа й окружне зусилля  $S$  в точці стикання коліс, якщо відстань між осями коліс дорівнює  $l$ , радіус зовнішнього колеса, вага кривошипа і зовнішнього колеса відповідно рівні  $r$ ,  $P_1$  і  $P_2$ ; механізм розташований у вертикальній площині.

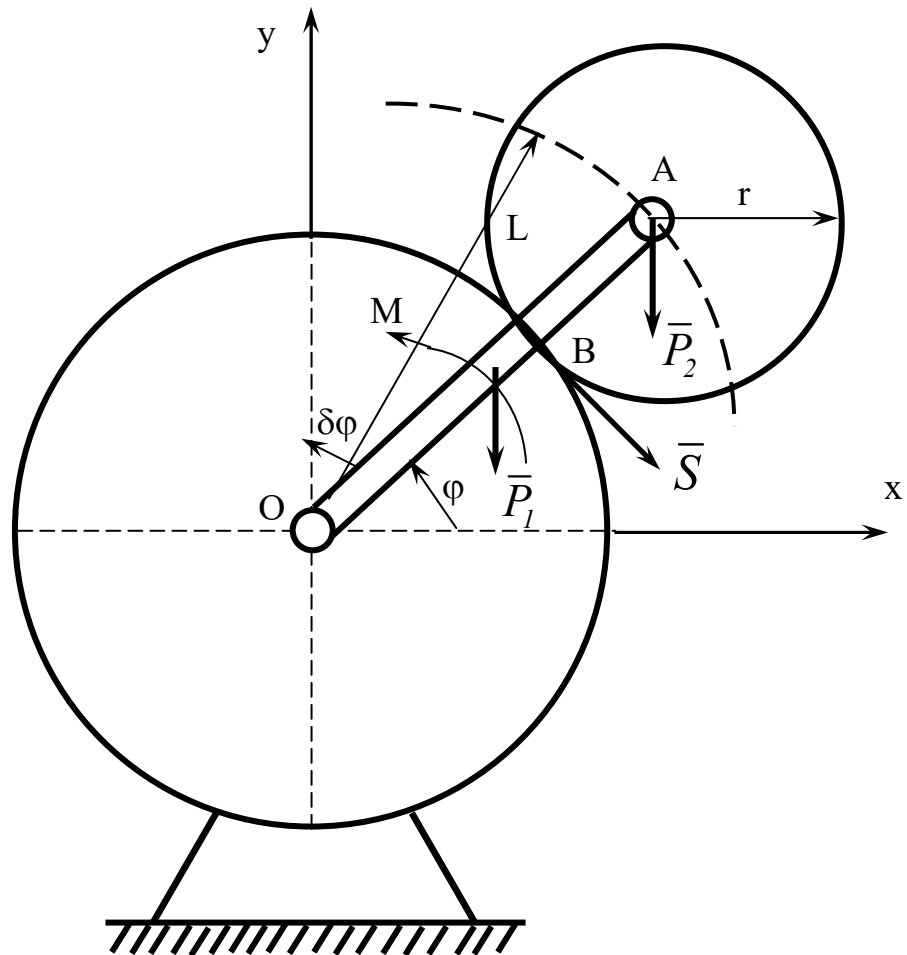


Рисунок 4.2

### Рішення

Дана система має один ступінь вільності, тому що положення цієї системи визначається кутом повороту  $\varphi$  кривошипа  $OA$ . Цей кут і візьмемо як узагальнену координату, тобто  $q_1 = \varphi$ . Тоді

$$\dot{q}_1 = \dot{\varphi} = \omega,$$

де  $\omega$  – кутова швидкість кривошипа.

Шукане прискорення кривошипа дорівнює:

$$\varepsilon = \ddot{q}_1 = \ddot{\varphi}.$$

Так як дана система має один ступінь вільності, то для цієї системи необхідно скласти тільки одне рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1. \quad (4.18)$$

Обчислимо кінетичну енергію системи:

$$T = T_1 + T_2, \quad (4.19)$$

де  $T_1$  – кінетична енергія кривошипа, а  $T_2$  – кінетична енергія зовнішнього колеса.

Так як кривошип здійснює обертальний рух, а зовнішнє колесо – плоскопаралельний, то їх кінетичні енергії:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} V_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_1^2, \quad (4.20)$$

де  $J_0$  – момент інерції кривошипа щодо його осі обертання  $O$ ;

$J_A$  – момент інерції зовнішнього колеса щодо його осі  $A$ ;

$\omega_1$  – кутова швидкість обертання зовнішнього колеса навколо його осі  $A$ ;

$V_A$  – швидкість центра  $A$  цього колеса.

Кривошип можна розглядати як тонкий однорідний стрижень, а зовнішнє колесо – як суцільний однорідний диск. Тому

$$J_0 = \frac{1}{3} \frac{P_1}{g} l^2; \quad J_A = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r^2.$$

Виразимо тепер усі швидкості через узагальнену швидкість  $\dot{\varphi} = \omega$ . Так як зовнішнє колесо котиться по нерухомому колесу без ковзання (миттєвий центр швидкостей зовнішнього колеса знаходиться в точці дотику  $B$ ), то

$$V_A = l\omega = r\omega_1$$

і, отже,

$$V_A = l\dot{\varphi}, \quad \omega_1 = \frac{V_A}{r} = \frac{l}{r}\dot{\varphi}.$$

Підставивши всі знайдені значення спочатку в рівності (4.20), а потім у рівність (4.19), знаходимо остаточно:

$$T = \frac{l^2}{12g}(2P_1 + 9P_2)\dot{\varphi}^2.$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{l^2}{6g}(2P_1 + 9P_2)\dot{\varphi}.$$

Перейдемо тепер до обчислення узагальненої сили  $Q_l$ . Для цього дамо кривошипу  $OA$  можливе кутове переміщення  $\delta\varphi$ , спрямоване проти ходу годинникової стрілки. На дану систему діють сили:  $\bar{P}_1$  – вага кривошипа,  $\bar{P}_2$  – вага зовнішнього колеса і пара з моментом  $M$ . Тому сума робіт цих сил і пари на можливому переміщенні  $\delta\varphi$  дорівнює:



$$\delta A = M \delta \varphi - P_1 \frac{l}{2} \cos \varphi \delta \varphi - P_2 l \cos \varphi \delta \varphi.$$

З іншого боку, ту ж елементарну роботу можна визначити так:

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 = Q_1 \delta \varphi.$$

Отже,

$$Q_1 \delta \varphi = \frac{1}{2} [2M - (P_1 + 2P_2) l \cos \varphi] \delta \varphi,$$

відкіля

$$Q_1 = \frac{1}{2} [2M - (P_1 + 2P_2) l \cos \varphi].$$

Після підстановки в рівняння (4.18) усіх значень одержуємо:

$$\frac{l^2}{6g} (2P_1 + 9P_2) \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} [2M - (P_1 + 2P_2) l \cos \varphi],$$

відкіля

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{3g [2M - (P_1 + 2P_2) l \cos \varphi]}{l^2 (2P_1 + 9P_2)}.$$

Окружне зусилля  $\bar{S}$  прикладене до зовнішнього колеса в точці  $B$  дотику з нерухомим колесом. Це зусилля викликає стосовно кривошипа обертальний рух зовнішнього колеса. Знайдемо  $\bar{S}$  за допомогою теореми

про зміну кінетичного моменту у відносному русі зовнішнього колеса стосовно осі  $A$  :

$$J_A \varepsilon_1 = m_A (\bar{S})$$

чи

$$\frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r^2 \varepsilon_1 = S r.$$

Беручи до уваги, що кутове прискорення  $\varepsilon_1$  зовнішнього колеса виражається через прискорення кривошипа  $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$  залежністю

$$\varepsilon_1 = \frac{l}{r} \ddot{\varphi},$$

знаходимо:

$$S = \frac{P_2 l}{2g} \ddot{\varphi} = \frac{3}{2} \frac{P_2 [2M - (P_1 + 2P_2) l \cos \varphi]}{l(2P_1 + 9P_2)}.$$

### Приклад 4.3

У механізмі, розташованому у горизонтальній площині (рис. 4.3), рукоятка  $O_1 O_2$ , що обертається навколо нерухомої вертикальної осі  $O_1$ , надає рух вільно насадженому на неї колесу  $II$  радіуса  $r_2$ . Це колесо зчеплене з колесом  $I$  радіуса  $r_1$ , що обертається навколо тієї ж осі  $O_1$ , і з нерухомим колесом  $III$ . До рукоятки прикладений заданий обертальний

момент  $M = const$ , а до колеса  $I$  – відомий момент опору  $M_I = const$ . Нехтуючи масою рукоятки, знайти її кутове прискорення, якщо відомі: довжина  $l$  рукоятки, ваги  $P_I$  і  $P_{II}$  коліс  $I$  і  $II$ , радіус інерції  $kr_I$  колеса  $I$  щодо осі  $O_I$  і радіус інерції  $kr_{II}$  колеса  $II$  щодо осі  $O_{II}$ , паралельній осі  $O_I$ , причому  $\frac{r_{II}}{r_I} = 1,5$ .

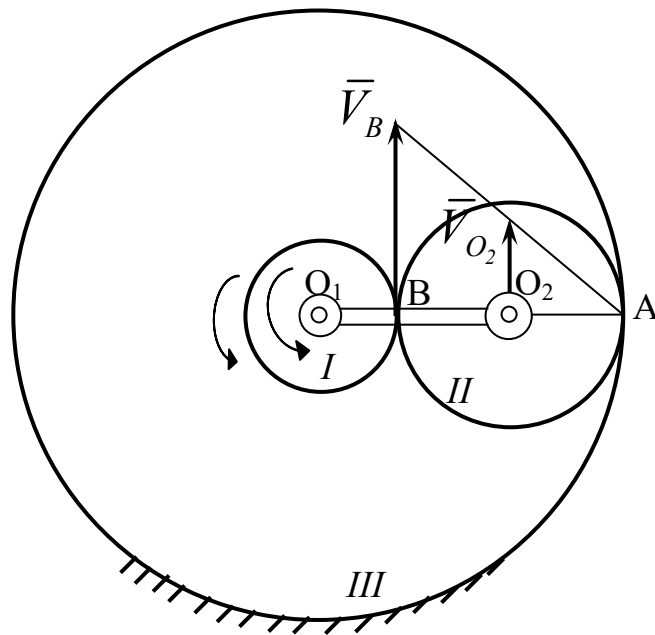


Рисунок 4.3

### Рішення

У цій задачі ми маємо систему з одним ступенем вільності, тому що положення даного механізму визначається одним параметром – кутом обертуту  $\varphi$  рукоятки. Цей кут і візьмемо за узагальнену координату  $q$  даної системи, тобто покладемо  $q = \varphi$ . Тоді

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega,$$

де  $\omega$  – є кутова швидкість рукоятки. Шукане кутове прискорення рукоятки дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Так як розглянута система має один ступінь вільності, то ми будемо мати для неї одне рівняння Лагранжа. Перш ніж скласти це рівняння, потрібно обчислити узагальнену силу  $Q$  і кінетичну енергію системи  $T = T_1 + T_2$ , де  $T_1$  є кінетична енергія колеса  $I$ , а  $T_2$  – кінетична енергія колеса  $II$ . Якщо кутову швидкість колеса  $I$  позначимо через  $\omega_1$ , а його момент інерції щодо осі обертання  $O_1$  – через  $J_1$ , то

$$J_1 = \frac{P_1}{g} k^2 r_1^2 \quad \text{и} \quad T_1 = J_1 \frac{\omega_1^2}{2} = \frac{P_1}{2g} k^2 r_1^2 \omega_1^2,$$

але швидкість точки  $B$  зачеплення коліс  $I$  і  $II$  дорівнює  $V_B = r_1 \omega_1$ , а тому

$$T_1 = \frac{P_1}{2g} k^2 V_B^2.$$

Рух колеса  $II$  є плоско паралельним, отже, його кінетична енергія дорівнює кінетичній енергії його центра ваги  $O_2$  в припущенні, що в цьому центрі зосереджена уся маса колеса плюс кінетична енергія колеса в його обертальному русі навколо осі, що проходить через центр ваги  $O_2$ , тобто

$$T_2 = \frac{P_2}{2g} V_{O_2}^2 + J_2 \frac{\omega_2^2}{2},$$

де  $V_{O_2}$  – швидкість точки  $O_2$ ;  $\omega_2$  – кутова швидкість колеса  $II$  і

$J_2$  – момент інерції цього колеса щодо осі  $O_2$ , рівний  $\frac{P_2}{g} k^2 r_2^2$ , а тому

$$T_2 = \frac{P_2}{2g} (V_{O_2}^2 + k^2 r_2^2 \omega_2^2)$$

і

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{2g} k^2 V_B^2 + \frac{P_2}{2g} (V_{O_2}^2 + k^2 r_2^2 \omega_2^2).$$

Так як колесо  $II$  зчеплене в точці  $A$  з нерухомим колесом  $III$ , то ця точка  $A$  є для колеса  $II$  миттєвим центром обертання; звідси випливає, що

$$V_{O_2} = r^2 \omega_2 \text{ та } V_B = 2r_2 \omega_2 = 2V_{O_2},$$

а тому

$$T = \left[ 4k^2 P_1 + (1 + k^2) P_2 \right] \frac{V_{O_2}^2}{2g}.$$

Так як точка  $O_2$  належить і рукоятці, маємо, що  $V_{O_2} = l\omega = l\dot{\phi}$ . Та-

ким чином, остаточно одержуємо наступний вираз кінетичної енергії даного механізму через узагальнену швидкість  $\dot{\varphi}$ , тобто через кутову швидкість рукоятки:

$$T = \frac{l^2}{2g} \left[ k^2 (4P_1 + P_2) + P_2 \right] \dot{\varphi}^2.$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{l^2}{g} \left[ k^2 (4P_1 + P_2) + P_2 \right] \dot{\varphi}$$

і

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{l^2}{g} \left[ k^2 (4P_1 + P_2) + P_2 \right] \ddot{\varphi}.$$

Тому що кінетична енергія  $T$  не залежить від координати  $\varphi$ , то

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Перейдемо тепер до обчислення узагальненої сили  $Q$ . Для цього розглянемо переміщення системи, яка відповідає зміні координати  $\varphi$  на дуже малу величину  $\delta\varphi$ , тобто переміщення, при якому рукоятка повертається навколо осі  $O_1$  проти годинникової стрілки на елементарний кут  $\delta\varphi$ . Ко-

лесо  $I$  повертається при цьому навколо тієї ж осі в тому ж напрямку, тобто проти годинникової стрілки, на деякий кут  $\delta\varphi_1$ . Сума елементарних робіт сил, прикладених до рукоятки, і сил опору, прикладених до колеса  $I$ , при цьому переміщенні дорівнює:

$$\sum \delta A = M \delta\varphi - M_1 \delta\varphi_1.$$

З іншого боку, та ж сума елементарних робіт дорівнює:

$$Q \delta q = Q \delta\varphi.$$

Отже,

$$Q \delta\varphi = M \delta\varphi - M_1 \delta\varphi_1,$$

відкіля

$$Q = \frac{M \delta\varphi - M_1 \delta\varphi_1}{\delta\varphi} = M - M_1 \frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi}.$$

Тому що кути оберту колеса  $I$  і рукоятки пропорційні їхнім кутовим

швидкостям, то  $\frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi} = \frac{\omega_1}{\omega}$ . Але

$$\omega_1 = \frac{V_B}{r_1} = \frac{2V_{O_2}}{r_1}, \quad \omega = \frac{V_{O_2}}{l},$$

а тому

$$\frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi} = \frac{2l}{r_1} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1} = 2\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) = 2\left(1 + \frac{3}{2}\right) = 5.$$

Отже,

$$Q = M - 5M_1.$$

Рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$$

для розглянутої системи набуде, таким чином, виду:

$$\frac{l^2}{g} \left[ k^2 (4P_1 + P_2) + P_2 \right] \ddot{\varphi} = M - 5M_1.$$

Звідси знаходимо шукане кутове прискорення рукоятки:

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{(M - 5M_1)g}{\left[ k^2 (4P_1 + P_2) + P_2 \right] l^2} = \text{const.}$$

Якщо  $M = 5M_1$ , то  $\varepsilon = 0$ , тобто рукоятка буде обертатися рівномірно.

#### Приклад 4.4

На гладкій горизонтальній площині розташована трикутна призма



$ABC$  масою  $m_1$ , яка може ковзати без тертя. По грані  $AB$  призми ковтається без ковзання однорідний круглий циліндр масою  $m_2$  (рис. 4.4). Визначити прискорення призми.

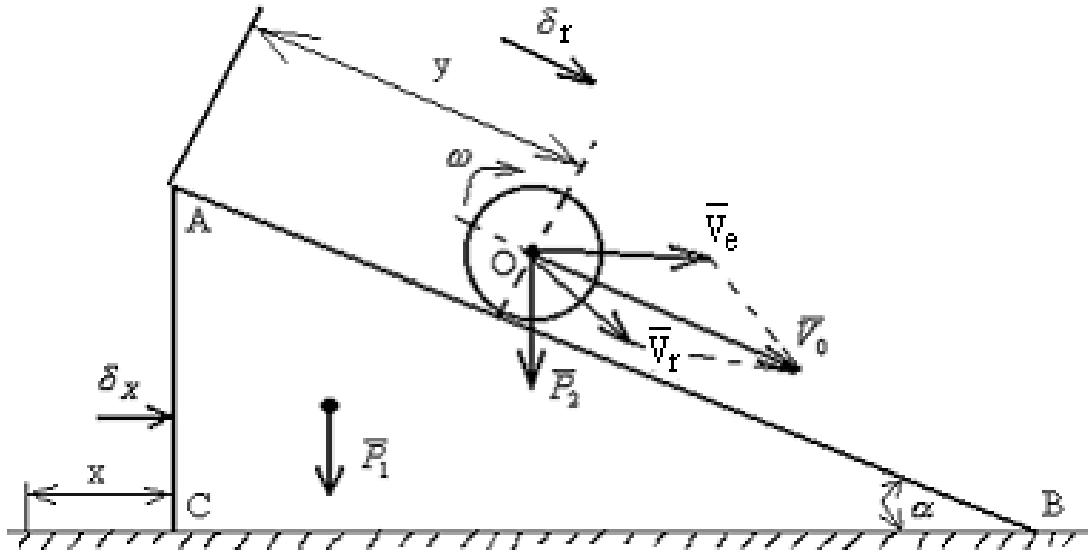


Рисунок 4.4

### Рішення

Механічна система “призма-циліндр” має два ступіні вільності. Введемо дві узагальнені координати:  $x$  і  $y$ . Тоді  $\dot{x}$  і  $\dot{y}$  – узагальнені швидкості призми і центра циліндра відповідно. Кінетична енергія системи визначається сумою

$$T = T_1 + T_2, \quad (4.21)$$

де

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} \dot{x}_1^2; \quad (4.22)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} V_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2, \quad (4.23)$$

де 
$$\bar{V}_0 = \bar{V}_e + \bar{V}_r = \dot{x} + \dot{y}.$$

Відповідно до формули (4.23) і рис. 4.4 маємо:

$$V_0^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha;$$

$$\omega = \frac{\dot{y}}{R},$$

де  $R$  – радіус циліндра.

$$I_0 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} R^2,$$

де  $I_0$  – момент інерції циліндра відносно його осі  $O$ .

Таким чином, вираз (4.23) набуде вигляду

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha) + \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} \dot{y}^2. \quad (4.24)$$

Використовуючи (4.21), (4.22) і (4.24), запишемо кінцевий вираз кінетичної енергії системи:

$$T = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha) + \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} \dot{y}^2. \quad (4.25)$$

Визначимо ліві частини рівнянь Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P_1 + P_2}{g} \dot{x} + \frac{P_2}{g} \dot{y}\cos\alpha,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P_1 + P_2}{g} \ddot{x} + \frac{P_2}{g} \cos \alpha \cdot \ddot{y}, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{P_2}{g} \left( \dot{x} \cos \alpha + \frac{3}{2} \dot{y} \right),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{P_2}{g} \left( \ddot{x} \cos \alpha + \frac{3}{2} \ddot{y} \right), \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (4.29)$$

Визначимо узагальнені сили.

Для знаходження  $Q_x$  дамо системі можливе переміщення  $\delta x$ . Тоді

$$\left( \sum_i \delta A_i \right)_x = (P_1 + P_2) \cos \frac{\pi}{2} \delta x = 0.$$

З цього випливає:  $Q_x = 0$ . (4.30)

Дамо можливе переміщення осі циліндра  $\delta y$  по грані призми  $AB$ .

Тоді

$$\left( \sum_i \delta A_i \right)_y = P_2 \sin \alpha \delta y.$$

З цього випливає:

$$Q_y = P_2 \sin \alpha. \quad (4.31)$$

За допомогою виразів (4.26)...(4.31) складемо рівняння Лагранжа:

$$\frac{P_1 + P_2}{g} \ddot{x} + \frac{P_2}{g} \sin \alpha \cdot \ddot{y} = 0, \quad (4.32)$$

$$\frac{P_2}{g} \left( \ddot{x} \cos \alpha + \frac{3}{2} \ddot{y} \right) = P_2 \sin \alpha. \quad (4.33)$$

З рівнянь (4.32) і (4.33) знаходимо прискорення призми  $a_1$ :

$$a_1 = \ddot{x} = \frac{\begin{vmatrix} 0 \cdot P_2 \cos \alpha \\ g \sin \alpha \cdot \frac{3}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1 + P_2 \cdot P_2 \cos \alpha \\ \cos \alpha \cdot \frac{3}{2} \end{vmatrix}} = - \frac{P_2 g \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\frac{3}{2} (P_1 + P_2) - P_2 \cos^2 \alpha},$$

з цього

$$a_1 = - \frac{P_2 g \sin 2\alpha}{3(P_1 + P_2) - 2P_2 \cos^2 \alpha}.$$

### Приклад 4.5

Механічна система складається з обмотаних нитками блоку 1 радіуса  $R_1$  і східчастого шківів 2, а так само з вантажів 3, 4 і 5, прикріплених до цих ниток. Система рухається у вертикальній площині під дією сил ваги і пари сил з моментом  $M_1$ , прикладених до блоку 1 (рис 4.5).

$$\begin{aligned}
 G_1 &= 30 \text{ Н}, & G_4 &= 20 \text{ Н}, \\
 G_2 &= 0, & G_5 &= 10 \text{ Н}, \\
 G_3 &= 40 \text{ Н}, & G_6 &= 0, \\
 R_1 &= 0,2 \text{ м}, & R_2 &= 0,3 \text{ м}, \\
 r_1 &= 0,1 \text{ м}, & r_2 &= 0,15 \text{ м}, \\
 \rho_1 &= 0,1 \text{ м}, & \rho_2 &= 0,2 \text{ м}.
 \end{aligned}$$

Визначити:  $a_3$  – прискорення вантажу 3.

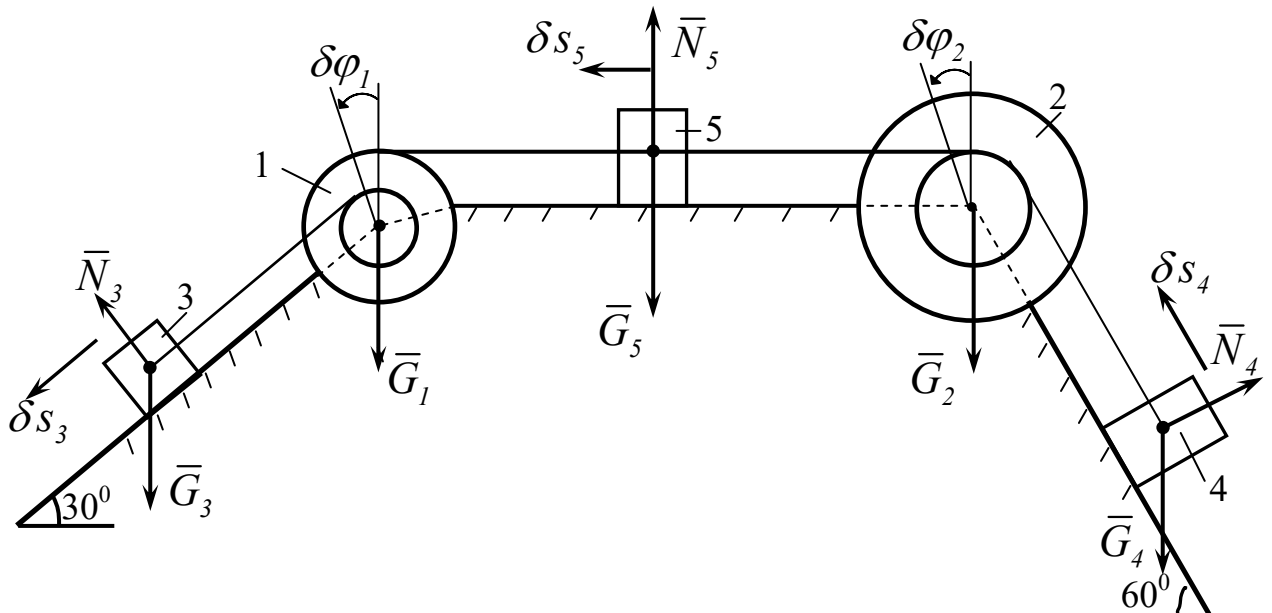


Рисунок 4.5

### Рішення

Система з одним ступенем вільності:

$$i = 1, \quad q = s.$$

Рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q.$$

Визначемо швидкості:

$$\omega_1 = \frac{V_3}{r_1}, \quad \omega_2 = \frac{V_5}{r_2} = \frac{R_1}{r_1 r_2} V_3,$$
$$V_5 = \frac{R_1}{r_1} V_3, \quad V_4 = \omega_2 R_2 = \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} V_3.$$

Визначимо кінетичну енергію:

$$T = T_1 + T_3 + T_4 + T_5,$$

$$T_1 = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} = \frac{G_1}{2g} \cdot \frac{\rho_1^2 V_3^2}{r_1^2},$$

$$T_3 = \frac{G_3 V_3^2}{2g},$$

$$T_4 = \frac{G_4}{2g} \cdot \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2} V_3^2,$$

$$T_5 = \frac{G_5}{2g} \cdot \frac{R_1^2}{r_1^2} V_3^2.$$

Тому що  $V_3 = \dot{s}_3$ , маємо:

$$T = \left( G_1 \cdot \frac{\rho_1^2}{r_1^2} + G_3 + G_4 \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2} + G_5 \frac{R_1^2}{r_1^2} \right) \frac{\dot{s}^2}{2g}.$$

Звідси:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \left( G_1 \cdot \frac{\rho_1^2}{r_1^2} + G_3 + G_4 \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2} + G_5 \frac{R_1^2}{r_1^2} \right) \frac{\dot{s}}{g},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = \left( G_1 \cdot \frac{\rho_1^2}{r_1^2} + G_3 + G_4 \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2} + G_5 \frac{R_1^2}{r_1^2} \right) \frac{\ddot{s}}{g}.$$

Визначимо узагальнену силу  $Q$ :

$$Q = \frac{(\delta A)_s}{\delta s_3} = \frac{\left( \sum_I^N F_K \cdot \delta \bar{r}_K \right)_s}{\delta s_3}.$$

Виразимо можливі переміщення:

$$\delta s_5 = \frac{R_1}{r_1} ds_3, \quad \delta s_4 = \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} \delta s_3, \quad \delta \varphi_2 = \frac{R_1}{r_1 r_2} \delta s_3,$$

$$(\delta A)_s = G_3 \sin 30^\circ \cdot \delta s_3 - G_4 \sin 60^\circ \cdot \delta s_4 - M \delta \varphi_2 =$$

$$= G_3 \sin 30^\circ \cdot \delta s_3 - G_4 \cdot \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} \cdot \sin 60^\circ \cdot \delta s_3 - M \cdot \frac{R_1}{r_1 r_2} \delta s_3.$$

Звідси

$$Q = G_3 \sin 30^\circ - G_4 \cdot \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} \cdot \sin 60^\circ - M \cdot \frac{R_1}{r_1 r_2}.$$

Підставимо отримані вирази в рівняння Лагранжа:

$$\left( G_1 \cdot \frac{\rho_1^2}{r_1^2} + G_3 + G_4 \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2} + G_5 \frac{R_1^2}{r_1^2} \right) \ddot{s} =$$

$$= G_3 \sin 30^\circ - G_4 \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} \sin 60^\circ - M \frac{R_1}{r_1 r_2}.$$

Остаточно

$$a_3 = \ddot{s}_3 = g \cdot \frac{G_3 \sin 30^\circ - G_4 \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} \sin 60^\circ - M \frac{R_1}{r_1 r_2}}{G_1 \frac{\rho_1^2}{r_1^2} + G_3 + G_4 \frac{R_1^2 R_2^2}{r_1^2 r_2^2} + G_5 \frac{R_1^2}{r_1^2}}.$$

Підставимо значення й одержимо  $a_3 = -6,1 \text{ м/с}^2$ .

Отримане прискорення – величина від’ємна, це означає, що фактично система рухається в протилежному напрямку.



### Приклад 4.6

Механічна система тіл 1, 2, 3 рухається в горизонтальній площині під дією момента  $M_1$ , прикладеного до кривошипу і момента  $M_2$ , прикладеного до колеса 2. Радіус інерції колеса 2  $i_{2x} = 2r$ . Колесо 3 вважати суцільним однорідним диском, а кривошип 3 – тонким однорідним стрижнем (рис. 4.6).

Маси тіл:  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m$ ,  $m_3 = 3m$ .

Узагальнені координати:  $q_1 = \varphi_1$ ,  $q_2 = \varphi_2$ .

Початкові умови:  $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$ ,  $\dot{\varphi}_{10} = \dot{\varphi}_{20} = 0$ .

Знайти рівняння руху системи в узагальнених координатах, тобто  $\varphi_1(t)$  і  $\varphi_2(t)$ .

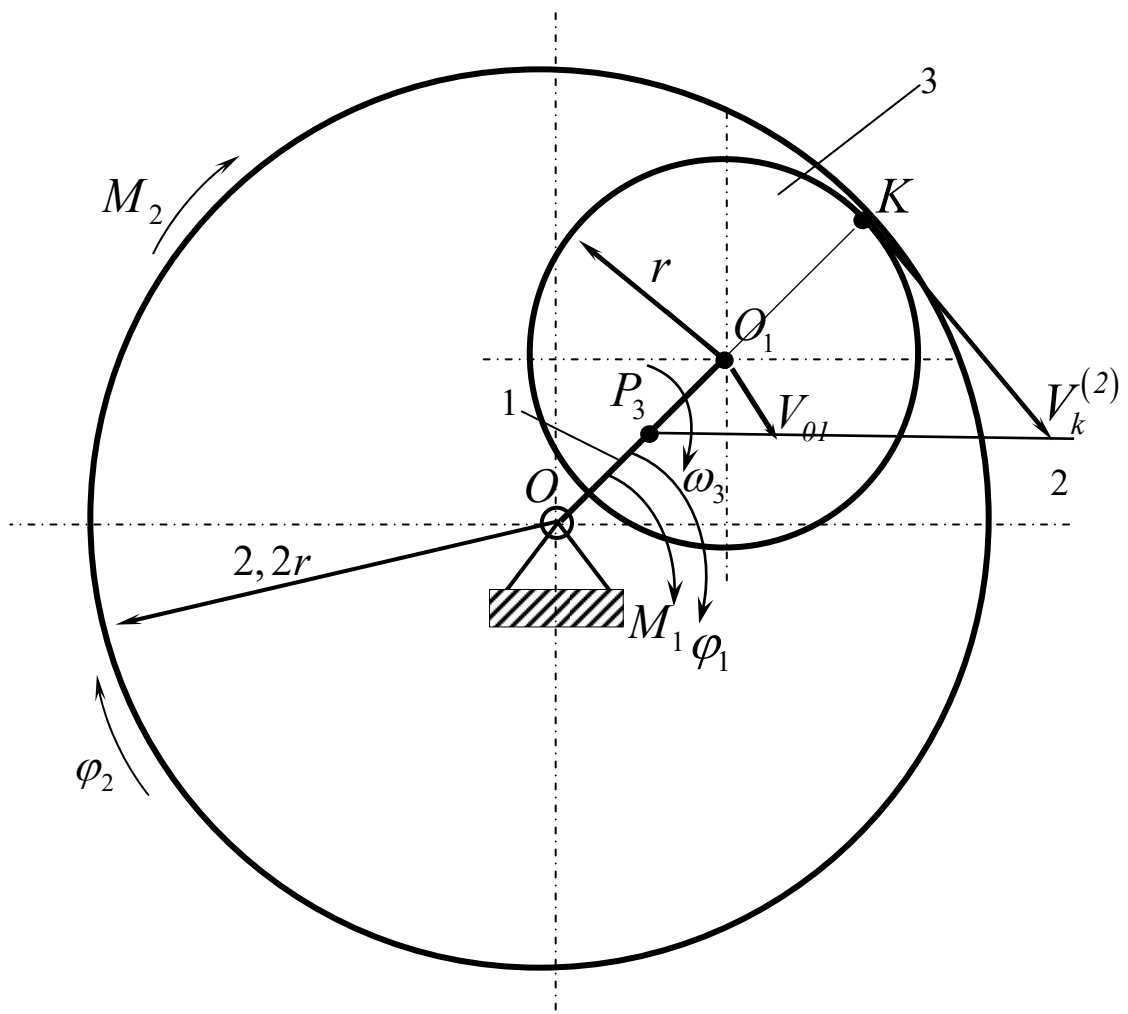


Рисунок 4.6

### Рішення

Запишемо рівняння Лагранжа 2-го роду:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = Q_2. \end{cases} \quad (4.34)$$

Виразимо швидкості тіл і точок системи через узагальнені швидкості  $\dot{\varphi}_1$  і  $\dot{\varphi}_2$ .

Тіла 1 і 2 здійснюють обертальний рух навколо нерухомої осі, тому:

$$\begin{aligned} V_{O_1} &= OO_1 \cdot \dot{\varphi}_1 = (2,2r - r) \cdot \dot{\varphi}_1 = 1,2r\dot{\varphi}_1; \\ V_K &= OK \cdot \dot{\varphi}_2 = 2,2r\dot{\varphi}_2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Колесо 3 рухається плоскопаралельно. Положення миттєвого центра швидкостей (т.  $P_3$ ) знайдемо із рисунка 4.6. Кутова швидкість колеса:

$$\omega_3 = \frac{V_K - V_{O_1}}{OK} = \frac{2,2r \cdot \dot{\varphi}_2 - 1,2r \cdot \dot{\varphi}_1}{r} = 2,2\dot{\varphi}_2 - 1,2\dot{\varphi}_1. \quad (4.36)$$

Кінетичну енергію системи знайдемо як суму кінетичних енергій тіл, що складають систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3; \quad (4.37)$$

$$T_1 = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} = \frac{m_1 O O_1^2}{3} \cdot \frac{\dot{\phi}_1^2}{2} = \frac{m_1 \cdot 1,2^2 \cdot r^2}{3} \cdot \frac{\dot{\phi}_1^2}{2}; \quad (4.38)$$

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = m_2 i_{2x}^2 \cdot \frac{\dot{\phi}_2^2}{2} = 2m_2 r^2 \cdot \frac{\dot{\phi}_2^2}{2}; \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{m_3 V_{O_1}^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 \cdot 1,2^2 \cdot r^2}{2} \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_3 \cdot r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \times \\ &\times (2,2\dot{\phi}_2 - 1,2\dot{\phi}_1)^2 = 2,16r^2 m_3 \cdot \frac{\dot{\phi}_1^2}{2} + 2,42r^2 m_3 \cdot \frac{\dot{\phi}_2^2}{2} - \\ &- 2,64r^2 m_2 \cdot \frac{\dot{\phi}_1 \cdot \dot{\phi}_2}{2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Підставимо формули (4.38), (4.39), (4.40) в рівняння (4.37):

$$T = (0,48m_1 + 2,16m_3)r^2 \cdot \frac{\dot{\phi}_1^2}{2} + (2m_2 + 2,42m_3)r^2 \cdot \frac{\dot{\phi}_2^2}{2} - 2,64r^2 m_3 \frac{\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2}{2}.$$

Знайдемо похідні, що входять до рівняння Лагранжа (4.34):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = (0,48m_1 + 2,16m_3)r^2 \ddot{\phi}_1 - 1,32r^2 m_3 \ddot{\phi}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} \right) = -1,32r^2 m_3 \ddot{\phi}_1 + (2m_2 + 2,42m_3)r^2 \ddot{\phi}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0. \quad (4.41)$$

Дамо системі два незалежних узагальнених можливих переміщення:  $\delta\varphi_1$  і  $\delta\varphi_2$ , спрямувавши їх в бік зростаючих значень узагальнених координат.

Для обрахування узагальненої сили  $Q_1$  будемо вважати, що  $\delta\varphi_1 \neq 0$  і  $\delta\varphi_2 = 0$ . Це означає, що колесо 2 нерухоме. Обчислимо суму робіт активних сил на можливому переміщенні  $\delta\varphi_1$ :

$$(\delta A)_{\varphi_1} = M_1 \cdot \delta\varphi_1.$$

Узагальнена сила

$$Q_1 = \frac{(\delta A)_{\varphi_1}}{\delta\varphi_1} = M_1. \quad (4.42)$$

Тепер будемо вважати, що  $\delta\varphi_1 = 0$ , а  $\delta\varphi_2 \neq 0$ .

Тоді

$$(\delta A)_{\varphi_2} = M_2 \cdot \delta\varphi_2.$$

$$Q_2 = \frac{(\delta A)_{\varphi_2}}{\delta\varphi_2} = M_2. \quad (4.43)$$

Підставимо (4.41), (4.42) і (4.43) в рівняння (4.34):

$$\begin{cases} (10,48m_1 + 2,16m_3)r^2\ddot{\varphi}_1 - 1,32r^2m_3\ddot{\varphi}_2 = M_1, \\ -1,32r^2m_3\ddot{\varphi}_1 + (2m_2 + 2,42m_3)r^2\ddot{\varphi}_2 = M_2. \end{cases} \quad (4.44)$$

Або з урахуванням умов задачі

$$\begin{cases} 6,96\ddot{\varphi}_1 - 3,96\ddot{\varphi}_2 = \frac{M_1}{mr^2}, \\ -3,96\ddot{\varphi}_1 + 11,26\ddot{\varphi}_2 = \frac{M_2}{mr^2}; \end{cases} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1 &= \frac{11,26M_1 + 3,96M_2}{62,688mr^2} = const; \\ \varepsilon_2 = \ddot{\varphi}_2 &= \frac{3,96M_1 + 6,96M_2}{62,688mr^2} = const. \end{aligned} \quad (4.46)$$

При нульових початкових умовах система переходить до руху із стану спокою. Враховуючи те, що  $\ddot{\varphi}_1 = const$  і  $\ddot{\varphi}_2 = const$ , робимо висновок, що кривошип 1 і колесо 2 обертаються за ходом годинникової стрілки рівноприскорено згідно з рівняннями:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{5,63M_1 + 1,98M_2}{62,688mr^2} t^2, \\ \varphi_2 &= \frac{1,98M_1 + 3,48M_2}{62,688mr^2} t^2. \end{aligned}$$

### Приклад 4.7

На шків радіуса  $r$  намотана нитка, до кінця якої підвішений точковий вантаж вагою  $P = mg$ , де  $m$  – маса вантажу (рис. 4.7). До шківа прикладений обертальний момент  $M$ , за допомогою якого цей вантаж піднімається, розгойдуючись в той же час у вертикальній площині. Скласти диференціальні рівняння руху системи, якщо момент інерції шківа щодо його осі дорівнює  $J_0$  і довжина звисаючої частини нитки при її вертикальному положенні в початковий момент дорівнює  $l_0$ .

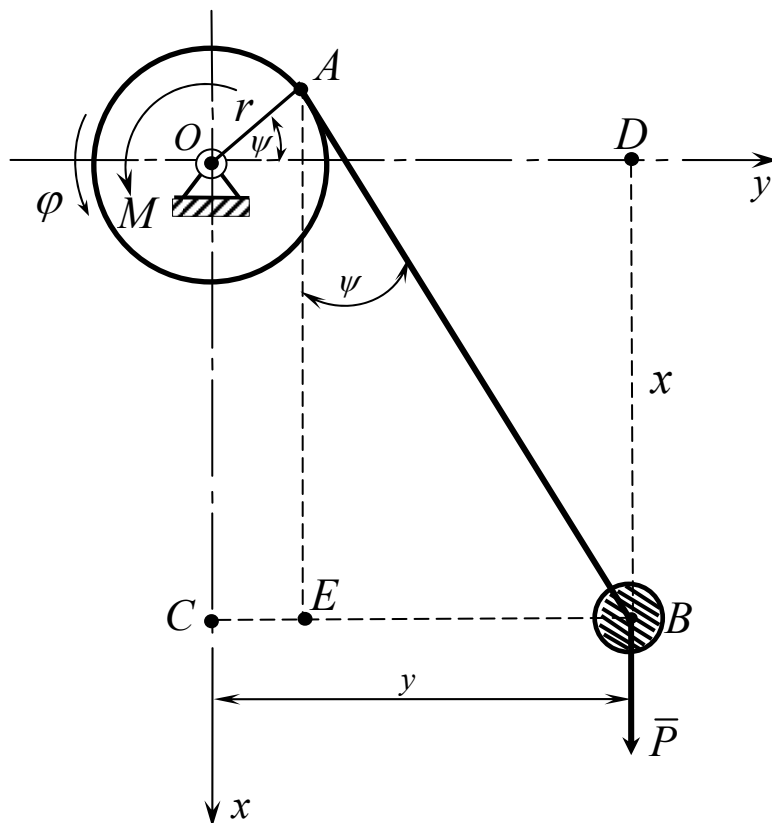


Рисунок 4.7

### Рішення

Система має два ступені вільності. Як узагальнені координати беремо кут  $\varphi$  повороту шківа і кут  $\psi$  відхилення нитки від вертикалі. Тоді рух системи визначається рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_{\varphi}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

Відстань від точки  $B$  підвісу вантажу до точки  $A$  набігання нитки на шків визначається в такий спосіб:

$$l = BA = l_0 - r\varphi + r\psi.$$

Звідси знаходимо координати точки  $B$  :

$$\left. \begin{aligned} x &= l \cos \psi - r \sin \psi = (l_0 - r\varphi + r\psi) \cos \psi - r \sin \psi ; \\ y &= l \sin \psi + r \cos \psi = (l_0 - r\varphi + r\psi) \sin \psi + r \cos \psi . \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Кінетична енергія системи складається з кінетичних енергій шківа і вантажу:

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) ,$$

але на підставі рівностей (4.48):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -r\dot{\varphi} \cos \psi - (l_0 - r\varphi + r\psi) \sin \psi \cdot \dot{\psi} ; \\ \dot{y} &= -r\dot{\varphi} \sin \psi + (l_0 - r\varphi + r\psi) \cos \psi \cdot \dot{\psi} . \end{aligned}$$

Отже,

$$T = \frac{J_0}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \left[ r^2 \dot{\varphi}^2 + (l_0 - r\varphi + r\psi)^2 \dot{\psi}^2 \right] .$$

Робимо операції, зазначені рівняннями (4.47):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= J_0 \dot{\varphi} + mr^2 \dot{\varphi} = (J_0 + mr^2) \dot{\varphi} , \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= (J_0 + mr^2) \ddot{\varphi} , \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -mr(l_0 - r\varphi + r\psi) \dot{\psi}^2 . \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= m(l_0 - r\varphi + r\psi)^2 \dot{\psi} , \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) &= m(l_0 - r\varphi + r\psi)^2 \ddot{\psi} + \\ &+ 2mr(l_0 - r\varphi + r\psi)(\dot{\psi} - \dot{\varphi})\dot{\psi} ; \\ \frac{\partial T}{\partial \psi} &= mr(l_0 - r\varphi + r\psi) \dot{\psi}^2 . \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Варіюючи координати  $\varphi$  і  $\psi$ , знаходимо суму можливих робіт сил, що діють на систему:

$$\sum \delta A = M \delta \varphi + P \delta x,$$

але на підставі рівнянь (4.48) маємо:



$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial x}{\partial \psi} \delta \psi = -r \cos \psi \delta \varphi - (l_0 - r \varphi + r \psi) \sin \psi \cdot \delta \psi.$$

Таким чином,

$$\sum \delta A = (M - P r \cos \psi) \delta \varphi - P (l_0 - r \varphi + r \psi) \sin \psi \delta \psi.$$

Коефіцієнти при варіаціях  $\delta \varphi$  і  $\delta \psi$  узагальнених координат в рівнянні віртуальних робіт є узагальненими силами системи:

$$\left. \begin{aligned} Q_\varphi &= M - P r \cos \psi ; \\ Q_\psi &= -P (l_0 - r \varphi + r \psi) \sin \psi . \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

З огляду на рівності (4.49), (4.50) і (4.51) рівняння (4.47) можна подати в наступному виді:

$$\begin{aligned} (J_0 + m r^2) \ddot{\varphi} + m r (l_0 - r \varphi + r \psi) \dot{\psi}^2 &= M - P r \cos \psi ; \\ (l_0 - r \varphi + r \psi) \ddot{\psi} + r (\psi - 2 \dot{\varphi}) \dot{\psi} &= -g \sin \psi . \end{aligned}$$

## 5 ДОСЛІДЖЕННЯ МАЛИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо механічну систему з  $n$  ступенями свободи, положення якої задають узагальнені координати  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Коливання цієї системи можна описати рівняннями Лагранжа. У загальному випадку система має  $n$  рівнянь:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

причому кожна з узагальнених сил у загальному випадку вважати складеною з трьох складових:

$$Q_j = Q_j^{\Pi} + Q_j^{\Phi} + Q_j^B,$$

де  $Q_j^{\Pi}$  – узагальнені потенційні сили:

$$Q_j^{\Pi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Потенційна енергія в загальному випадку залежить від координат точок системи  $(q_j)$  і не залежить від узагальнених швидкостей  $(\dot{q}_j)$ . Для нестационарного силового поля, а також нестационарних зв'язків потенційна енергія може залежати ще і від часу.

$Q_j^{\Phi}$  – узагальнені сили, зв'язані з дією сил опору, що залежать як від числових значень, так і від напрямків швидкостей точок системи. Ми розглянемо випадок лінійного опору, коли сили опору пропорційні швидкостям точок і спрямовані в сторони, протилежні швидкостям.

Сили  $Q_j^B$  – узагальнені сили, отримані від дії сил, що *змушують* чи *обурюють* коливання. Вони залежать насамперед від часу.

Отже, у загальному випадку рівняння Лагранжа мають вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^{\Pi} + Q_j^{\Phi} + Q_j^B \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

У силу складності коливань системи в загальному випадку, обмежимося тільки вивченням малих коливань системи з одним ступенем вільності.

Розглянемо малі коливання системи з одним ступенем вільності ( $n = 1$ ) під дією одних потенційних сил, тобто коли

$$Q = Q_j^{\Pi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}.$$

Вважаємо, що сил опору і сил, що викликають коли-

вання, немає ( $Q^{\Phi} = 0$  ( $Q^B = 0$ )). Такі коливання називаються вільними.

Нехай система, на яку накладені голономні, ідеальні, не звільняючі і стаціонарні в'язі, складається з  $N$  точок і рухається навколо положення рівноваги. Її кінетична енергія

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \quad (5.1)$$

Постійна  $a$  називається *коефіцієнтом інерції*. Звичайно за розмірністю коефіцієнт інерції є чи масою, чи моментом інерції.

Потенційна енергія  $\Pi$  для стаціонарного силового поля і стаціонарних в'язей є функцією тільки  $q$ .

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} c q^2, \quad (5.2)$$

де  $c$  – *коефіцієнт жорсткості* системи чи просто *жорсткість*.

На підставі формул (5.1) і (5.2) одержуємо:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial n}{\partial q} = cq.$$

Підставляючи ці значення в рівняння Лагранжа, диференціальне рівняння малих власних коливань системи з одним ступенем вільності набуде вигляду:

$$a\ddot{q} + cq = 0. \quad (5.3)$$

Позначимо  $c/a = k^2$ , тоді:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \quad (5.4)$$

де  $k = \sqrt{c/a}$  називається *круговою (циклічною) частотою коливань*.

Диференціальне рівняння (5.3) є однорідним лінійним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами. Його рішення можна шукати у вигляді  $q = e^{\lambda t}$ . Його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Рішення цього рівняння:

$$\lambda_{1,2} = \pm ki.$$

На підставі теорії диференціальних рівнянь рішення рівняння (5.3) можна подати у виді:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

і для узагальненої швидкості:

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt .$$

З початкових умов  $t = 0, q = q_0, \dot{q} = \dot{q}_0$  одержуємо  $C_1 = q_0; C_2 = \dot{q}_0/k$ .

Рішення рівняння (5.4) може бути також подане в інший, т.зв. *амплітудній формі*:

$$q = A \sin(kt + \alpha),$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin \alpha = \frac{C_1}{A}, \quad \cos \alpha = \frac{C_2}{A}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1}{C_2} .$$

$A$  – амплітуда коливань. Вона визначає найбільше відхилення узгальненої координати від положення рівноваги, яке відповідає значенню  $q = 0$ . Координата  $q$  змінюється в межах від  $+A$  до  $-A$ .

$\alpha$  – початкова фаза коливань (при  $t = 0$ ),  $(kt + \alpha)$  – фаза коливань.

Період коливання  $T = \frac{2\pi}{k}$  ;

Частота коливань  $\nu = \frac{1}{T}$  .

Кругова частота  $k = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$  .  $k$  – це число коливань за час,

яке дорівнює  $2\pi$  с .

Якщо на точки системи з одним ступенем вільності крім потенційних сил діють ще сили опору, то диференціальне рівняння Лагранжа виразиться у формі:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{\Pi} + Q^{\Phi}, \quad (5.5)$$

де  $Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$  – узагальнена сила потенційних сил;  $Q^{\Phi}$  – узагальнена сила опору.

Розглянемо випадок лінійного опору, коли сили опору  $\bar{R}_k$  точок системи лінійно залежать від швидкостей цих точок.

Уведемо поняття *дисипативної функції*, тобто функції Релея:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2, \quad (5.6)$$

Додатна стала величина  $\mu$  називається *узагальненим коефіцієнтом опору*.

Поблизу положення рівноваги системи маємо наступні вирази для кінетичної енергії, потенційної енергії і дисипативної функції:

$$T = \frac{a\dot{q}^2}{2}, \quad \Pi = \frac{cq^2}{2}, \quad \Phi = \frac{\mu\dot{q}^2}{2}.$$

Підставляючи їх у рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^n + Q^{\Phi},$$

і з огляду на те, що

$$Q^\Phi = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = - \mu \dot{q},$$

одержуємо наступне диференціальне рівняння:

$$a \ddot{q} = - c q - \mu \dot{q}.$$

Якщо розділити обидві частини рівняння на  $a$  і ввести позначення

$$k^2 = \frac{c}{a}, \quad 2n = \frac{\mu}{a},$$

то одержимо диференціальне рівняння руху системи

в остаточній формі:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0. \quad (5.7)$$

Величина  $n = \frac{\mu}{2a}$  називається *коефіцієнтом загасання*

$$[n] = [k] = c^{-1}.$$

Диференціальне рівняння (5.7) – однорідне лінійне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Його рішення варто шукати у формі

$q = e^{\lambda t}$ , де постійна  $\lambda$  визначається з характеристичного рівняння

$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$ . Корені його:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (5.8)$$

Можуть видатися три випадки: 1)  $n < k$  – випадок малого опору; 2)  $n > k$  – випадок великого опору; 3)  $n = k$  – випадок критичного опору.

**Загасаючі коливання ( $n < k$ )**

Позначимо  $k_1 = \sqrt{n^2 - k^2}$ ,

тоді:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm k_1 i.$$

Рішення рівняння (5.7) запишеться у виді:

$$q = e^{-n \cdot t} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \quad (5.9)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – сталі інтегрування.

Рішення (5.8) можна записати в іншій, амплітудній, формі:

$$q = A e^{-n \cdot t} \sin(k_1 t + \alpha), \quad (5.10)$$

де  $A$  і  $\alpha$  – теж постійні інтегрування.

**Аперіодичний рух ( $n > k$ )** (випадок великого опору).

У цьому випадку

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm k_2,$$

де  $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$ .

Обидва корені дійсні і негативні, тому що  $k_2 < n$ .

Отже, загальне рішення рівняння (5.7) має вид:



$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}) , \quad (5.11)$$

де сталі  $C_1$  і  $C_2$  знаходяться з початкових умов  $t = 0, q = q_0, \dot{q} = \dot{q}_0$ .

Випадок *критичного опору*  $n = k$ .

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n \quad q = e^{-nt} (C_1 t + C_2). \quad (5.12)$$

Цей також дає аперіодичний рух.

Розглянемо випадок, коли крім потенційних сил на матеріальну систему діє сила, залежна від часу, яка збуджує коливання. Відповідну узагальнену силу позначимо  $Q^B$ . Тоді одержимо наступне диференціальне рівняння:

$$\ddot{q} + k^2 q = F(t) , \quad (5.13)$$

де  $F(t) = \frac{Q^B(t)}{a}$  ( $a$  – коефіцієнт інерції).

Припускаючи, що збуджуюча сила змінюється за гармонійним законом, отримаємо:

$$\ddot{q} + k^2 q = h \sin(pt + \delta) , \quad (5.14)$$

де  $h, p$  і  $\delta$  – постійні величини.

Загальне рішення отриманого рівняння:

$$q = q_1 + q_2. \quad (5.15)$$

Рішення  $q_1$  називають *власним коливанням системи*.

Приватне рішення  $q_2$  рівняння (5.14) називають *змушеним коливанням системи*.

Можливі два випадки:

**1 Випадок відсутності резонансу ( $p \neq k$ ).**

Рішення  $q_2$  варто шукати у виді:

$$q_2 = B \sin(pt + \delta), \quad (5.16)$$

де  $B = \frac{h}{k^2 - p^2}$  і  $q_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$ . (5.17)

**2 Випадок резонансу ( $p = k$ ).**

Рішення шукаємо у формі:

$$q_2 = B t \cos(pt + \delta), \quad (5.18)$$

де

$$B = -\frac{h}{2p}.$$

$$q_2 = -\frac{ht}{2p} \cos(pt + \delta) = \frac{ht}{2p} \sin\left(pt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.19)$$

Розглянемо випадок, коли узагальнена сила  $Q$  складається з трьох

сил: потенційної  $Q^n = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -cq$ ; лінійного опору

$Q^\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -\mu \dot{q}$  і гармонійної сили, збуджуючої

$Q^B = H \sin(pt + \delta)$ . Підставляючи це значення узагальненої сили

$Q = Q^n + Q^\Phi + Q^B$  в рівняння Лагранжа, одержуємо:

$$a\ddot{q} + \mu\dot{q} + cq = H \sin(pt + \delta)$$

чи

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h \sin(pt + \delta), \quad (5.20)$$

де  $k^2 = \frac{c}{a}$  – кругова частота власних коливань,

$n = \frac{\mu}{a}$  – коефіцієнт загасання;

$h = \frac{H}{a}$  – відносна амплітуда збуджуючої сили.

Рішення рівняння  $q = q_1 + q_2$ .

Тут  $q_1$  – загальне рішення однорідного рівняння, його називають *власним рухом*;

$q_2$  – приватне рішення неоднорідного рівняння, називане змушеним

коливанням; величину  $Q$  називають загальним змушеним рухом (чи змушеним коливанням).

Рішення  $q_2$  шукаємо у формі  $q_2 = A \sin(pt + \delta - \varepsilon)$ ;

$$\dot{q}_2 = A p \cos(pt + \delta - \varepsilon) ; \ddot{q}_2 = -A p^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

де

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} ;$$

$$\sin \varepsilon = \frac{2Anp}{h} ; \quad \cos \varepsilon = \frac{A(k^2 - p^2)}{h} ; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} .$$

Якщо система має два ступені вільності, то рівняння Лагранжа мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{2\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 ; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{2\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 . \end{cases}$$

### Приклад 5.1

Дано (рис. 5.1):

$$m_1 = 1, m_2 = 3, m_4 = 2, m_7 = 0, c = 40 \text{ Н/см},$$

$$y_0 = 0, \dot{y}_0 = 6 \text{ м/с}.$$

Знайти:  $k$ ,  $T$ ,  $y = y(t)$ .

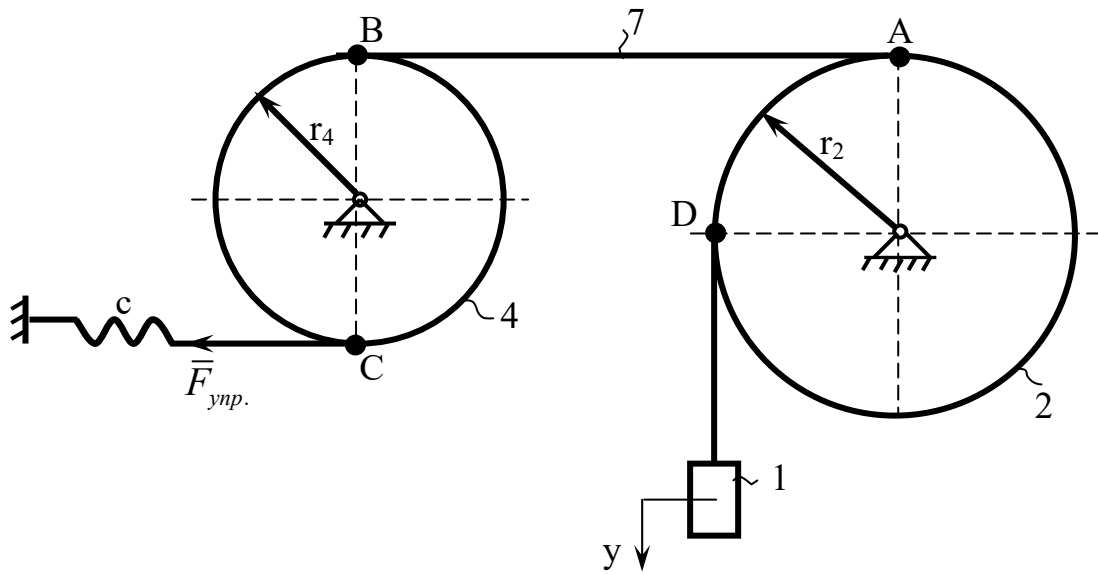


Рисунок 5.1

**Рішення**

Рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y}.$$

Виразимо швидкості центрів мас і кутові швидкості тіл через узагальнену координату  $y$ :

$$V_1 = \dot{y}, \quad \omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{\dot{y}}{r_2}; \quad \omega_4 = \frac{\dot{y}}{r_4}; \quad V_C = V_B = \omega_4 r_4;$$

$$V_1 = V_D = \dot{y} = \omega_2 r_2;$$

$$V_D = V_A = \omega_2 r_2; \quad V_A = V_B = V_C = \omega_2 r_2 = \omega_4 r_4;$$

$$\dot{y} = \omega_2 r_2 = \omega_4 r_4;$$

$$V_1 = V_A = V_B = V_C = V_D = \dot{y}.$$

Моменти інерції тіл 2 і 4 щодо осей обертання:

$$J_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2; \quad J_4 = \frac{1}{2} m_4 r_4^2.$$

Кінетичні енергії тіл:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_2 r_2^2 \cdot \frac{y^2}{r_2^2} = \frac{1}{4} m_2 \cdot \dot{y}^2;$$

$$T_4 = \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_4 r_4^2 \cdot \frac{\dot{y}^2}{r_4^2} = \frac{1}{4} m_4 \dot{y}^2;$$

$$T = T_1 + T_2 + T_4;$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{4} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{4} m_4 \dot{y}^2.$$

Потенційна енергія системи:

$$\Pi = \Pi_{\text{тяж.}} + \Pi_{\text{упр.}},$$

$$\Pi_{\text{тяж.}} = -m_1 g y,$$

$$\Pi_{\text{упр.}} = \frac{c(f_{cm} + \lambda_c)^2}{2} - \frac{c f_{cm}^2}{2},$$

$$\lambda_c = y,$$

де  $f_{cm}$  – статична деформація пружини;

$\lambda$  – переміщення точки прикріплення пружини  $C$ , що відповідає координаті  $Y$ .

Тоді

$$\Pi_{\text{упр.}} = \frac{c(f_{cm} + y)^2}{2} - \frac{c f_{cm}^2}{2}.$$

Потенційна енергія системи:

$$\begin{aligned} \Pi &= -m_1 g y + \frac{c(f_{cm} + y)^2}{2} - \frac{c f_{cm}^2}{2} = -m_1 g y + \frac{c f_{cm}^2}{2} + \\ &+ c f_{cm} y + \frac{c y^2}{2} - \frac{c f_{cm}^2}{2} = -m_1 g y + c f_{cm} y + \frac{c y^2}{2} = \\ &= y(C f_{cm} - m_1 g) + \frac{c y^2}{2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \left( y c f_{cm} - m_1 g y + \frac{c y^2}{2} \right)'_{\partial y} = -m_1 g + c f_{cm} + c y.$$

Початкові умови:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \Rightarrow -m_1 g + c f_{cm} = 0.$$

Тоді потенційна енергія системи:

$$\Pi = \frac{c y^2}{2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = m_1 \dot{y} + \frac{1}{2} m_2 \dot{y} + \frac{1}{2} m_4 \dot{y};$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) = m_1 \ddot{y} + \frac{1}{2} m_2 \ddot{y} + \frac{1}{2} m_4 \ddot{y};$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \left( \frac{1}{2} c y^2 \right)'_{\partial y} = c y.$$

Підставимо отримані вирази в рівняння Лагранжа другого роду:

$$m_1 \ddot{y} + \frac{1}{2} m_2 \ddot{y} + \frac{1}{2} m_4 \ddot{y} = -c y;$$

$$\left( m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_4 \right) \ddot{y} + c y = 0. \quad (5.21)$$

Виконаємо перевірку, застосувавши другий спосіб, а саме – диференціювання за часом інтеграла енергії  $\dot{T} + \dot{\Pi} = 0$ .

Кінетична енергія системи:



$$T = T_1 + T_2 + T_4;$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{4}m_2\dot{y}^2 + \frac{1}{4}m_4\dot{y}^2.$$

Потенційна енергія системи:

$$\Pi = \Pi_{mg.} + \Pi_{упр.},$$

$$\Pi_{mg} = -m_1gy,$$

$$\Pi_{упр.} = \frac{c(f_{cm} + \lambda_c)^2}{2} - \frac{cf_{cm}^2}{2},$$

$$\lambda_c = y,$$

$$\Pi = -m_1gy + \frac{c(f_{cm} + \lambda_c)^2}{2} - \frac{cf_{cm}^2}{2} = -m_1gy + \frac{cf_{cm}^2}{2} +$$

$$+ cf_{cm}y + \frac{cy^2}{2} - \frac{cf_{cm}^2}{2} = -m_1gy + cf_{cm}y + \frac{cy^2}{2} =$$

$$= y(cf_{cm} - m_1g) + \frac{cy^2}{2},$$

$$\Pi = y(cf_{cm} - m_1g) + \frac{cy^2}{2},$$

$$\dot{\Pi} = (cf_{cm} - m_1g)\dot{y} + \frac{2cy \cdot \dot{y}}{2} = (cf_{cm} - m_1g)\dot{y} + cy \cdot \dot{y}.$$

Початкові умови

$$\dot{\Pi}_{y=0} = 0 \Rightarrow cf_{cm} - m_1g = 0.$$

Виходить,  $\dot{\Pi} = c\dot{y}$ .

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \frac{1}{2}m_1 \cdot 2\dot{y}\ddot{y} + \frac{1}{4} \cdot m_2 \cdot 2 \cdot \dot{y}\ddot{y} + \frac{1}{4}m_4 \cdot 2 \cdot \dot{y}\ddot{y} = \\ &= m_1\dot{y}\ddot{y} + \frac{1}{2}m_2\dot{y}\ddot{y} + \frac{1}{2}m_4\dot{y}\ddot{y};\end{aligned}$$

$$\dot{T} = m_1\dot{y}\ddot{y} + \frac{1}{2}m_2\dot{y}\ddot{y} + \frac{1}{2}m_4\dot{y}\ddot{y};$$

$$\dot{T} + \dot{\Pi} = 0;$$

$$m_1\dot{y}\ddot{y} + \frac{1}{2}m_2\dot{y}\ddot{y} + \frac{1}{2}m_4\dot{y}\ddot{y} + c\dot{y}\dot{y} = 0.$$

Розділимо обидві частини рівняння на  $\dot{y}$ :

$$m_1\ddot{y} + \frac{1}{2}m_2\ddot{y} + \frac{1}{2}m_4\ddot{y} + cy = 0;$$

$$\left(m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_4\right)\ddot{y} + cy = 0. \quad (5.22)$$

Очевидно, що рівняння (5.21) і (5.22) однакові.

Знайдемо рівняння руху вантажу 1.

З рівняння (5.21):

$$\ddot{y} + \frac{c}{m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_4} y = 0;$$

$$\ddot{y} + k^2 y = 0;$$

$$k^2 = \frac{c}{m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_4};$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_4}}.$$

Період вільних коливань:

$$T = \frac{2\pi}{k};$$

$$y = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt;$$

$$\dot{y} = -kc_1 \sin kt + kc_2 \cos kt.$$

Початкові умови:

$$t = 0; \quad \begin{cases} c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = y_0 = 0, \\ kc_2 \cos 0 - kc_1 \sin 0 = \dot{y}_0 = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = y_0, \\ kc_2 = y_0; \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = y_0, \\ c_2 = \frac{y_0}{k}; \end{cases}$$

$$y = y_0 \cos kt + \left( \frac{\dot{y}_0}{k} \right) \sin kt;$$

$$y = 0 \cdot \cos kt + \frac{6}{k} \sin kt = \frac{6}{k} \sin kt.$$

Відповідь:  $y = \frac{6}{k} \sin kt.$

### Приклад 5.2

На кінці стрижня вагою  $G_1$ , прикріпленого до стіни за допомогою шарніра  $O$ , знаходиться вантаж  $B$ . Стрижень з вантажем утримується в горизонтальному положенні вертикальною пружиною з коефіцієнтом жорсткості  $C$  (рис. 5.2).

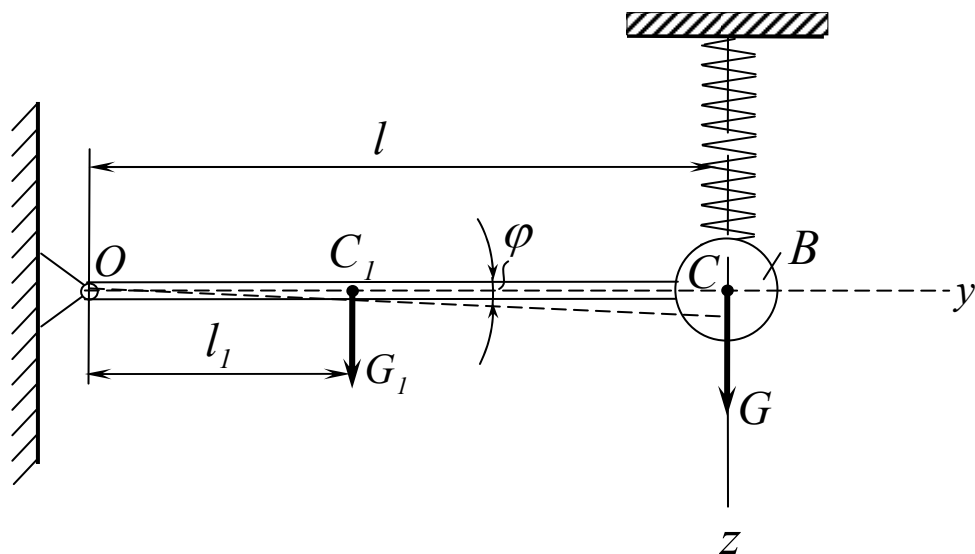


Рисунок 5.2

Відстань від шарніра до центрів ваги вантажу і стрижня відповідно рівна  $l$  і  $l_1$ , момент інерції стрижня щодо осі  $O_x$  дорівнює  $J_x$ . Визначити коефіцієнти інерції і жорсткості цієї системи, а також частоту і період її коливань, взявши як узагальнені координати  $Z$  – відхилення центра ваги

вантажу  $B$  від рівноважного горизонтального положення або  $\varphi$  – кут повороту стрижня.

### Рішення

Припустивши, що узагальнена координата –  $Z$ , одержуємо:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J_x\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{G}{g} + \frac{J_x}{l^2}\right)\dot{z}^2 = \frac{1}{2}m_{np}\dot{z}^2;$$

$$\begin{aligned} \Pi &= -G_1z\frac{l_1}{l} - Gz + \frac{c(f+z)^2}{2} - \frac{cf^2}{2} = \\ &= -\left(G_1\frac{l_1}{l} + G\right)z + cfz + \frac{cz^2}{2}, \end{aligned}$$

де  $m_{np}$  – зведена маса;  $f$  – статичне подовження пружини в стані

рівноваги системи;  $\frac{cf^2}{2}$  – потенційна енергія пружини в положенні рівноваги, стосовно якого обчислюється потенційна енергія системи.

Якщо при рівновазі

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_{z=0} = -\left(G_1\frac{l_1}{l} + G\right) + cf = 0; \quad cf = G_1\frac{l_1}{l} + G,$$

то

$$\Pi = \frac{1}{2}cz^2.$$

З виразу кінетичної енергії  $T$  встановлюємо коефіцієнт інерції системи, що відповідає узагальненій координаті  $Z$  :

$$a_z = m_{np} = \frac{G}{g} + \frac{J_x}{l^2}.$$

З виразу потенційної енергії  $\Pi$  знаходимо коефіцієнт жорсткості системи, що відповідає цій узагальненій координаті:

$$c_z = c.$$

Припустивши, що узагальнена координата – кут  $\varphi$ , одержуємо:

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{Gl^2}{g} + J_x \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} J_{np} \dot{\varphi}^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} cz^2 = \frac{1}{2} cl^2 \varphi^2.$$

З виразів  $T$  і  $\Pi$  встановлюємо коефіцієнти інерції і жорсткості, що відповідають узагальненій координаті  $\varphi$  :

$$a_\varphi = J_{np} = \frac{Gl^2}{g} + J_x; \quad c_\varphi = cl^2.$$

Порівняння отриманих значень коефіцієнтів інерції і жорсткості показує, що вони різні для різних узагальнених координат, які вибираються довільно. *Довільний вибір узагальнених координат не відбивається на значен-*

нях частоти і періоду вільних коливань систем.

У розглянутому прикладі:

$$k = \sqrt{\frac{c_z}{a_z}} = \sqrt{\frac{c_\varphi}{a_\varphi}} = \sqrt{\frac{c}{\frac{G}{g} + \frac{J_x}{l^2}}};$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{Gl^2 + J_x g}{cgl^2}}.$$

### Приклад 5.3

До стрижня, розглянутої в прикладі 3 механічної системи, на відстані  $l_2$  від шарніра  $O$  приєднаний рідинний демпфер (рис. 5.3).

Визначити частоту і період коливань системи, припустивши, що опір поршня при його русі в рідині пропорційний першому ступеню швидкості, тобто рівний  $R = \beta V$ , де  $\beta$  – коефіцієнт пропорційності. Установити також значення  $\beta$ , при якому система робить аперіодичний рух.

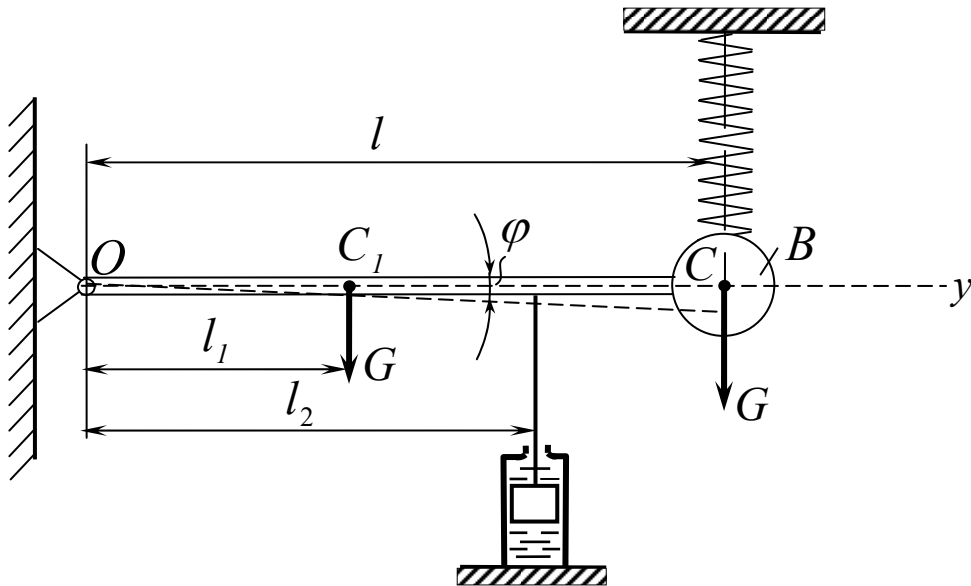


Рисунок 5.3

### Рішення

Візьмемо як узагальнену координату механічної системи кут оберту  $\varphi$ .

Кінетична і потенційна енергії розглянутої механічної системи визначені при рішенні приклада 3 і дорівнюють:

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{Gl^2}{g} + J_x \right) \dot{\varphi}^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} cl^2 \varphi^2.$$

З цих виразів знаходимо коефіцієнт інерції механічної системи  $a_\varphi$  і коефіцієнт твердості  $c_\varphi$ :

$$a_\varphi = \frac{Gl^2}{g} + J_x; \quad c_\varphi = cl^2.$$

Узагальнена сила опору демпфера –

$$Q_R = -\beta V = -\beta l_2 \dot{\varphi}.$$

Тому що

$$Q_R = -b_\varphi \dot{\varphi} = -\beta l_2 \dot{\varphi}$$

та

$$b_\varphi = \beta l_2.$$

Диференціальне рівняння вільних коливань механічної системи при



наявності опору, пропорційного першому ступеню швидкості, має вигляд:

$$a_{\varphi} \ddot{\varphi} + b_{\varphi} \dot{\varphi} + c_{\varphi} \varphi = 0.$$

Підставляючи знайдені значення  $a_{\varphi}$ ,  $b_{\varphi}$  і  $c_{\varphi}$ , одержуємо:

$$\left( \frac{Gl^2}{g} + J_x \right) \ddot{\varphi} + \beta l_2 \dot{\varphi} + cl^2 \varphi = 0$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta l_2 g}{Gl^2 + J_x g} \dot{\varphi} + \frac{cl^2 g}{Gl^2 + J_x g} \varphi = 0.$$

Тут

$$2n = \frac{\beta l_2 g}{Gl^2 + J_x g}, \quad \text{т.ч.} \quad n = \frac{\beta l_2 g}{2(Gl^2 + J_x g)};$$

$$k^2 = \frac{cl^2 g}{Gl^2 + J_x g}, \quad \text{т.ч.} \quad k = \sqrt{\frac{cl^2 g}{Gl^2 + J_x g}}.$$

Знаючи частоту вільних коливань механічної системи  $k$  і коефіцієнт загасання  $n$ , визначаємо частоту загасаючих коливань  $k^*$ :

$$k^* = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Період загасаючих коливань механічної системи

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Значення коефіцієнта пропорційності  $\beta$ , при якому система робить аперіодичний рух, визначаємо з умови  $n \geq k$ , тобто:

$$\frac{\beta l_2 g}{2(Gl^2 + J_x)} \geq \sqrt{\frac{cl^2 g}{Gl^2 + J_x g}},$$

відкіля

$$\beta \geq \frac{2l}{l_2 g} \sqrt{cg(Gl^2 + J_x g)}.$$

#### Приклад 5.4

Механічна система, що знаходиться в рівновазі складається з східчастих колес 1 та 2 з радіусами сідців  $r_1, R_1, r_2, R_2$ , стрижня 3, вантажу 4, невагомих стрижнів 5 та 6, двох пружин 6 та 7 з коефіцієнтами жорсткості  $C_1$  та  $C_2$  (рис. 5.4).

Дано:  $m_1=20$  кг,  $m_2=16$  кг,  $m_3=8$  кг,  $m_4=10$  кг,  $r_1=0,2$  м,  $R_1=0,4$  м,  $r_2=0,12$  м,  $R_2=0,18$  м,  $O_3A=l=1$  м,  $O_3B=l/3$ ,  $c_1=1000$  Н/м,  $C_2=1200$  Н/м, радіуси інерції  $\rho_1=0,3$  м,  $\rho_2=0,15$  м.

Знайти: частоту  $k$  та період  $\tau$  малих коливань системи навколо стану рівноваги.

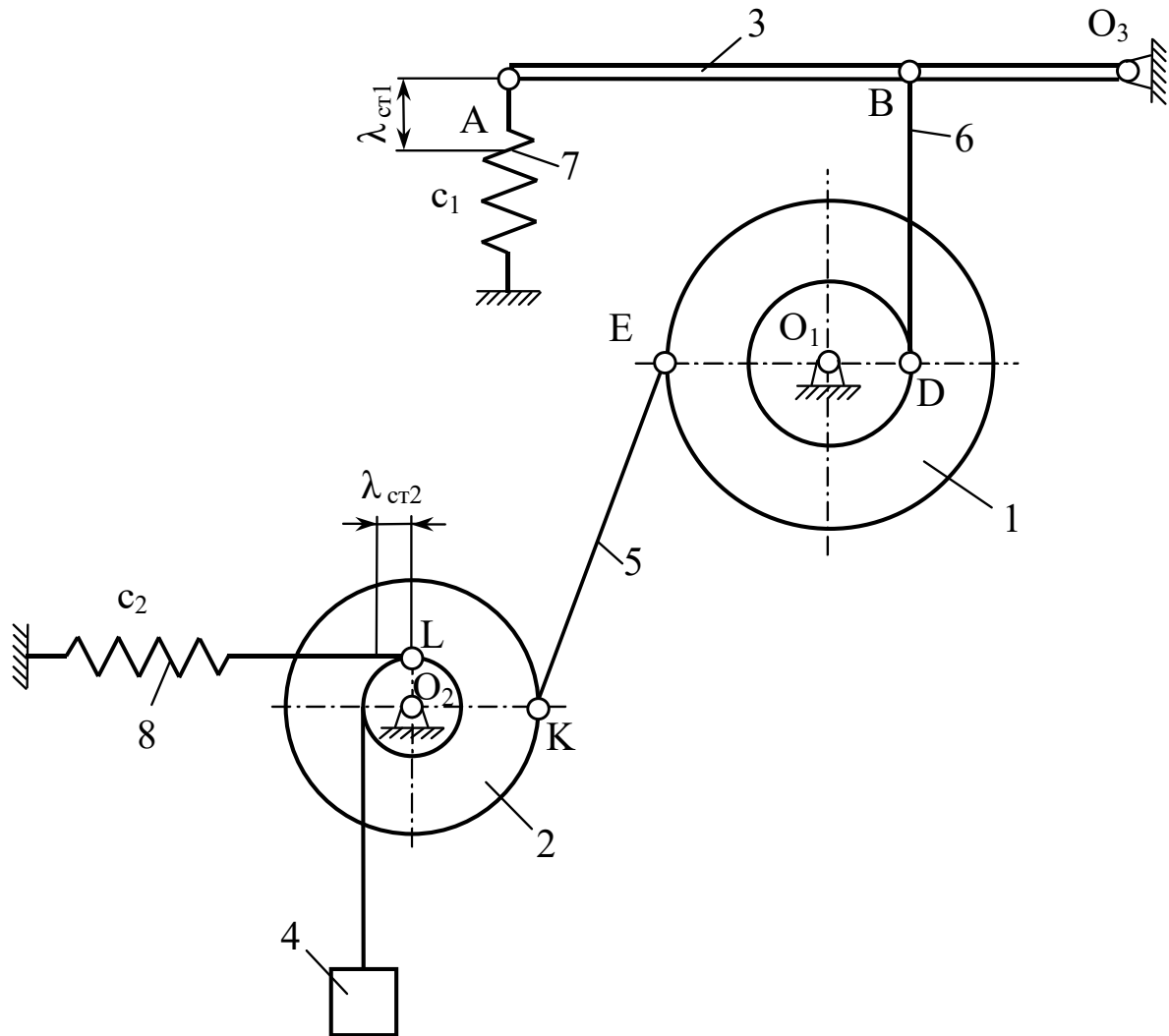


Рисунок 5.4

### Рішення

**1** Розглянемо довільне положення системи, коли вона виведена із стану рівноваги та робить малі коливання (рис. 5.5).

Система має одну ступінь вільності. Оберемо за узагальнену координату кут  $\varphi$  оберту колеса 1, вважаючи  $\varphi$  малим, і складемо для системи рівняння Лагранжа. Оскільки всі діючі активні сили (сила пружності та сила тяжіння) потенційні, виражаємо узагальнену силу  $Q$  через потенційну енергію  $\Pi$  системи. Тоді вихідним рівнянням буде:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q, \quad (5.23)$$

$$\text{де } Q = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

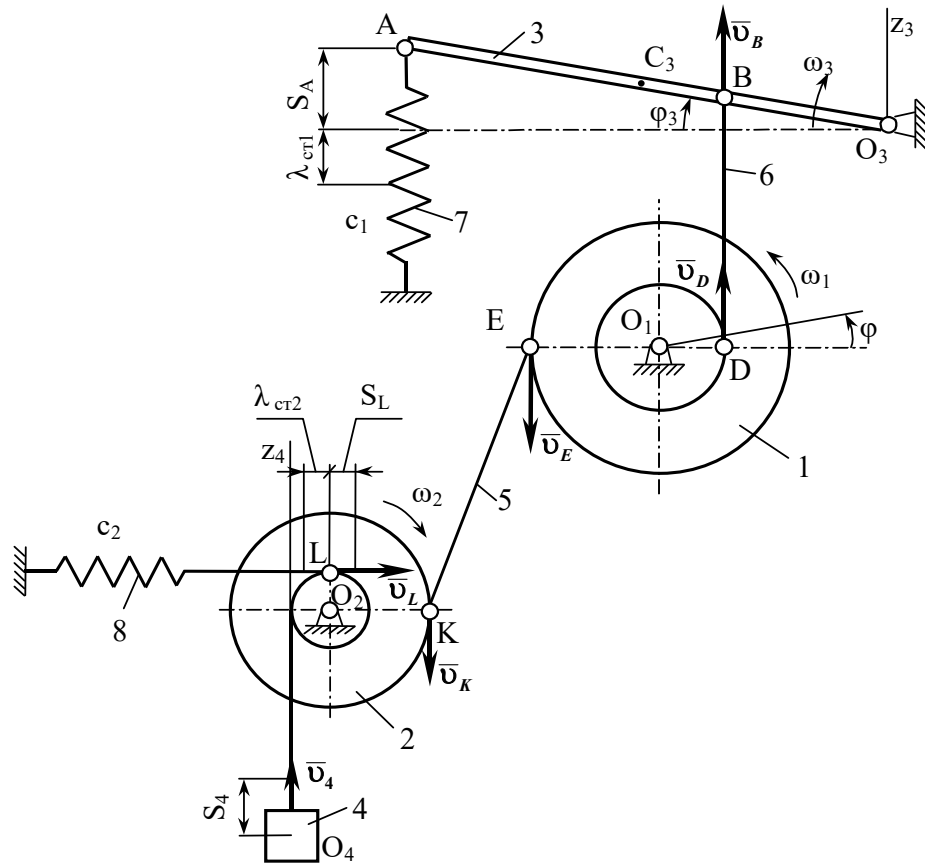


Рисунок 5.5

При дослідженні малих коливань в рівнянні зберігають малі величини  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  в першому ступені, відкидаючи малі члени розкладу більш високого порядку. Для цього треба знайти вирази  $T$  і  $\Pi$  з точністю до  $\varphi^2$  і  $\dot{\varphi}^2$ , бо до формули (5.23) входять перші похідні від  $T$  і  $\Pi$  по  $\varphi$  та  $\dot{\varphi}$ , а при диференціюванні багаточлена його ступінь знижується на одиницю.

2 Визначимо кінетичну енергію  $T$  системи, яка дорівнює сумі енергій всіх вагомих тіл:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (5.24)$$

Оскільки колеса 1, 2 і стрижень 3 обертаються навколо осей  $O_1$ ,  $O_2$  і  $O_3$  відповідно, а вантаж 4 рухається поступово, то

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{I_{0_1} \omega_1^2}{2}; \\ T_2 &= \frac{I_{0_2} \omega_2^2}{2}; \\ T_3 &= \frac{I_{0_3} \omega_3^2}{2}; \\ T_4 &= \frac{m_4 \omega_4^2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

$$\text{де } I_{0_1} = m_1 \rho_1^2, \quad I_{0_2} = m_2 n_2^2, \quad I_{0_3} = \frac{m_3 l^2}{3}. \quad (5.26)$$

Усі швидкості, що входять до рівності (5.26), треба виражати через узагальнену швидкість  $\dot{\varphi} = \omega_1$ . З огляду на те, що  $\varphi$  – мала величина, можна вважати:

$$v_D = v_B = \omega_1 r_1 = r_1 \dot{\varphi}; \quad \omega_3 = \frac{v_B}{O_3 B} = 3 \frac{r_1}{l} \dot{\varphi};$$

$$v_E = v_K = \omega_1 R_1 = R_1 \dot{\phi}; \quad \omega_2 = \frac{v_k}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} \dot{\phi}; \quad (5.27)$$

$$v_4 = v_L = \omega_2 r_2 = \frac{R_1 r_2}{R_2} \dot{\phi}.$$

Підставляючи величини (5.26) та (5.27) в рівності (5.25), отримаємо із формули (5.24):

$$T = \frac{1}{2} a_0 \dot{\phi}^2, \quad (5.28)$$

$$\text{де } a_0 = m_1 \rho_1^2 + m_2 \frac{R_1^2 \rho_2^2}{R_2^2} + 3m_3 r_1^2 + m_4 \frac{R_1^2 r_2^2}{R_2^2} \dots$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = a_0 \dot{\phi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = a_0 \ddot{\phi}. \quad (5.29)$$

3 Визначимо потенційну енергію ( $\Pi$ ) системи, враховуючи, що для пружини –

$$\Pi = 0,5c\lambda^2,$$

де  $\lambda$  – деформація пружини.

А для поля сил тяжіння –

$$\Pi = mgz_c,$$

де  $Z_c$  – координата центру тяжіння (ось  $Z$  спрямована за вертикаллю вгору).

Тоді для всієї системи –

$$\Pi = 0,5c_1\lambda_1^2 + 0,5c_2\lambda_2^2 + m_1gz_{c_1} + m_2gz_{c_2} + m_3gz_{c_3} + m_4gz_{c_4}, \quad (5.30)$$

де величини  $\lambda_1, \lambda_2, z_{c_1}, z_{c_2}, z_{c_3}, z_{c_4}$  мають бути виражені через  $\varphi$ .

Визначаючи  $\lambda_1, \lambda_2$ , врахуємо, що в стані рівноваги пружини можуть мати деякі статичні (початкові) деформації  $\lambda_{ст1}, \lambda_{ст2}$ , необхідні для збереження рівноваги (в нашому випадку для зрівноваження сил тяжіння  $\bar{P}_3$  та  $\bar{P}_4$ ). У довільному стані (рис. 1.44) пружини отримують додаткові деформації, рівні  $S_A$  і  $S_L$ , причому з огляду на те, що  $\varphi$  – мала величина, можна вважати  $S_A = \varphi_3 l$  і  $S_L = \varphi_2 r_2$ .

Враховуючи, що залежність між малими переміщеннями буде така ж як і між відповідними швидкостями, отримаємо:

$$\varphi_2 = \frac{R_1}{R_2} \varphi; \quad \varphi_3 = 3 \frac{r_1}{l} \varphi$$

та, відповідно,

$$S_A = 3r_1\varphi, \quad S_L = \frac{R_1 r_2}{R_2} \varphi.$$

Тоді

$$\lambda_1 = \lambda_{cm_1} + S_A = \lambda_{cm_1} + 3r_1\varphi \quad \text{та} \quad \lambda_2 = \lambda_{cm_2} + S_L = \lambda_{cm_2} + \frac{R_1 r_2}{R_2} \varphi.$$

Для  $Z_{c_1}$  і  $Z_{c_2}$ , які взяли початок координат в точках  $O_1$  і  $O_2$ , відповідно, отримаємо  $Z_{c_1} = Z_{c_2} = 0$ . Для  $Z_{c_3}$ ; спрямовуючи вісь  $Z_3$  з точки  $O_3$  вгору, отримаємо  $Z_{c_3} = 0,5l \sin(\varphi_3)$ . У випадку малих кутів можна вважати  $\sin(\varphi_3) = \varphi_3$ , (у випадку, коли стрижень вертикальний, потрібно використати розклад  $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ ), тоді

$$Z_{c_3} = \frac{3}{2} r_1 \varphi.$$

Для  $Z_{c_4}$ , суміщаючи початок координат  $O_4$  з положенням центру тяжіння вантажу при рівновазі, отримаємо:

$$Z_{c_4} = S_4,$$

де  $S_4 = \frac{R_1 r_2}{R_2} \varphi$  – переміщення вантажу.

Підставляючи всі знайдені величини в рівність (5.30), отримаємо:



$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{C_1}{2} (\lambda_{cm_1} + 3r_1\varphi)^2 + \frac{C_2}{2} \left( \lambda_{cm_2} + \frac{R_1 r_2}{R_2} \varphi \right)^2 + \\ & + g \left( \frac{3}{2} m_3 r_1 + m_4 \frac{R_1 r_2}{R_2} \right) \varphi. \end{aligned} \quad (5.31)$$

4 Визначимо узагальнену силу:

$$\begin{aligned} Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = & - \left[ 3c_1 r_1 (\lambda_{cm_1} + 3r_1\varphi) + c_2 \frac{R_1 r_2}{R_2} \left( \lambda_{cm_2} + \frac{R_1 r_2}{R_2} \varphi \right) + \right. \\ & \left. + g \left( \frac{3}{2} m_3 r_1 + m_4 \frac{R_1 r_2}{R_2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

У стані рівноваги, тобто коли  $\varphi = 0$ , має бути, щоб і  $Q = 0$ . Тоді із рівності (5.32) отримаємо:

$$3c_1 r_1 \lambda_{cm_1} + c_2 \frac{R_1 r_2}{R_2} \lambda_{cm_2} = -g \left( \frac{3}{2} m_3 r_1 + m_4 \frac{R_1 r_2}{R_2} \right). \quad (5.33)$$

Підставляючи формулу (5.33) у рівняння (5.32), знайдемо остаточно:

$$Q = -b\varphi, \quad (5.34)$$

$$\text{де } b = 9c_1 r_1^2 + c_2 \frac{R_1^2 r_2^2}{R_2^2}.$$

5 Складаємо рівняння Лагранжа. Підставивши значення формул (5.29) та (5.34) в рівняння (5.24), отримаємо:

$$a_0 \ddot{\varphi} = -b\varphi$$

або

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (5.35)$$

де

$$k^2 = \frac{b}{a_0} = \frac{9c_1 r_1^2 R_2^2 + c_2 R_1^2 r_2^2}{m_1 \rho_1^2 R_2^2 + m_2 R_1^2 \rho_2^2 + 3m_3 r_1^2 R_2^2 + m_4 R_1^2 r_2^2}.$$

З теорії коливань відомо, що коли рівняння набуває вигляду (5.35), то в ньому величина  $k$  являється розшуковою коловою частотою, а період  $\tau = \frac{2\pi}{k}$ . При заданих числових значеннях, зробивши відповідні розрахунки, отримаємо:  $k = 9,21 \text{ c}^{-1}$ ;  $\tau = 0,682 \text{ c}$ .

### Приклад 5.5

Скласти диференціальне рівняння руху маятника з масою матеріальної точки  $m$ , позначеною на рисунку 5.6 як  $M$ . Точка  $M$  підвішена на нитці, довжина якої змінюється за довільним законом  $l = l(t)$ , а точка

підвісу  $O$  рухається за законом  $s = s(t)$  за похилою прямою, яка створює кут  $\alpha$  з горизонтом.

### Рішення

Кінетична енергія точки є

$$T = \frac{1}{2} m V^2, \quad (5.36)$$

де  $V$  – швидкість точки  $M$  в довільний час її руху.  
Як видно з рисунка 5.6,

$$\begin{aligned} x &= s(t)\cos\alpha + l(t)\sin\varphi; \\ y &= s(t)\sin\alpha + l(t)\cos\varphi. \end{aligned}$$

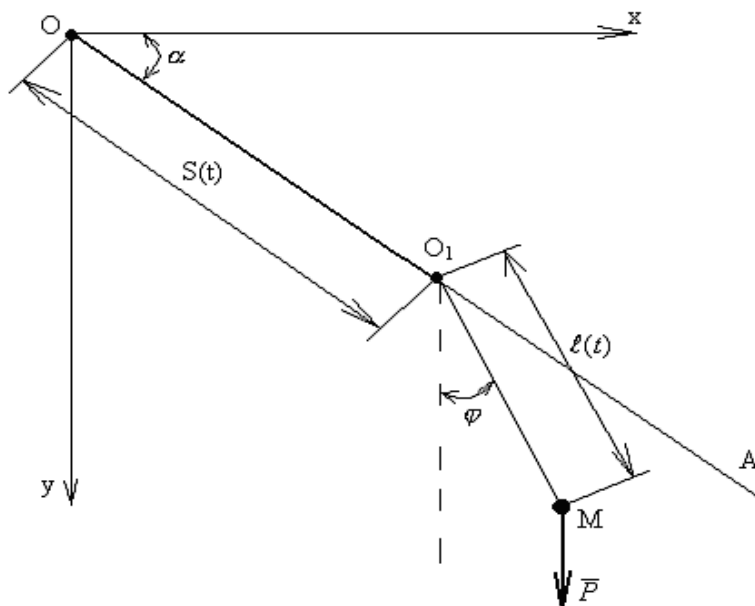


Рисунок 5.6

Визначаємо похідні від цих рівнянь:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{s}\cos\alpha + \dot{l}\sin\varphi + l\dot{\varphi}\cos\varphi; \\ \dot{y} &= \dot{s}\sin\alpha + \dot{l}\cos\varphi - l\dot{\varphi}\sin\varphi.\end{aligned}$$

Тоді:

$$V^2 = \dot{s}^2 l^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{s}l\sin(\alpha + \varphi) + 2l\dot{\varphi}\cos(\alpha + \varphi). \quad (5.37)$$

Ураховуючи формулу (5.37) запишемо формулу (5.36):

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{s}^2 + \dot{l}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{s}l\sin(\alpha + \varphi) + 2l\dot{\varphi}\cos(\alpha + \varphi)). \quad (5.38)$$

Визначимо можливу роботу на переміщенні  $\delta y$ :

$$\delta A = mg \delta y.$$

Ураховуючи залежність  $y = y(\varphi)$ , отримаємо:

$$\delta y = -l(t)\sin\varphi \delta \varphi$$

і, зробивши перехід до змінної  $\varphi$ , знаходимо:

$$Q_\varphi = -mgl\sin\varphi. \quad (5.39)$$

Запишемо рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}, \quad (5.40)$$

де відповідно (5.38):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(l^2 \dot{\varphi} + l\dot{s}\cos(\alpha + \varphi));$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(l^2 \ddot{\varphi} + 2l\dot{l}\dot{\varphi} + l\dot{s}\cos(\alpha + \varphi) + l\dot{s}\cos(\alpha + \varphi) - l\dot{s}\dot{\varphi}\sin(\alpha + \varphi)); \quad (5.41)$$

41)

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m(l\dot{s}\cos(\alpha + \varphi) - l\dot{s}\dot{\varphi}\sin(\alpha + \varphi)). \quad (5.42)$$

За допомогою результатів (5.39)...(5.42) після перетворення остаточно маємо:

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \frac{\dot{s}}{l}\cos(\alpha + \varphi) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

### Приклад 5.6

Визначити рух системи, що містить дві маси  $m_1$  і  $m_2$ , посаджених на гладкий горизонтальний стрижень (рис. 5.7). Маси зв'язані пружиною жорсткістю  $C$  і в змозі рухатися поступально вздовж стрижня. Відстань між центрами мас дорівнює  $l$ .

Початковий стан системи при  $t = t_0 = 0$  визначається даними:

$$x_1 = 0, \dot{x}_1 = V_0, x_2 = l, \dot{x}_2 = 0.$$

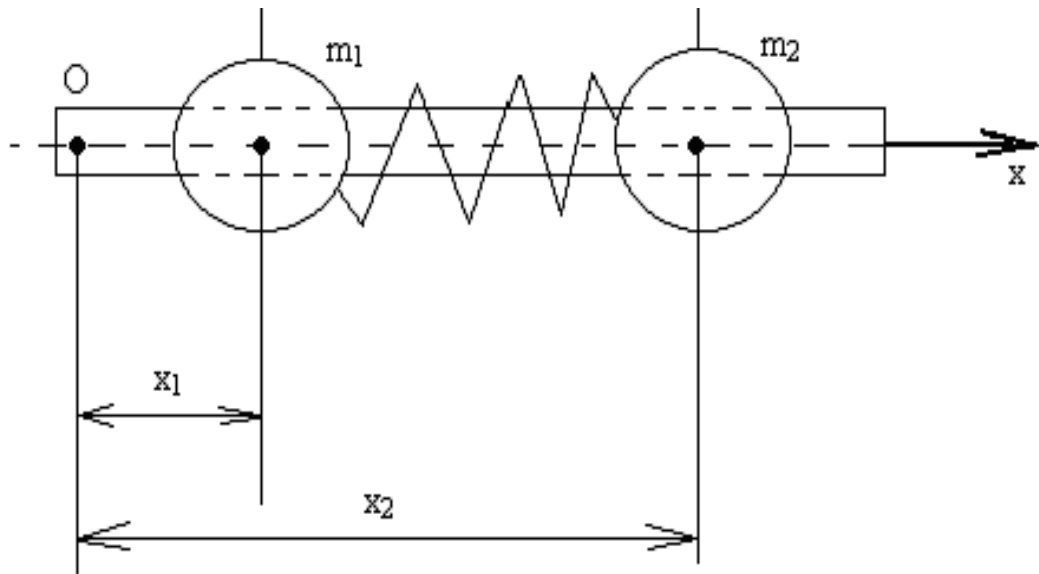


Рисунок 5.7

### Рішення

Система містить дві маси і має два ступені вільності. Її кінетична енергія відповідає виразу

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2, \quad (5.43)$$

а потенційна –

$$\Pi = -\frac{c}{2} (\Delta l)^2,$$

де  $\Delta l$  – деформація пружини, яка дорівнює

$$\Delta l = x_2 - x_1 - l_0,$$

де  $l_0$  – довжина недеформованої пружини.

З цього

$$\Pi = -\frac{c}{2}(x_2 - x_1 - l_0)^2. \quad (5.44)$$

Знайдемо узагальнені сили:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = -c(x_2 - x_1 - l_0), \quad (5.45)$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -c(x_2 - x_1 - l_0). \quad (5.46)$$

Визначимо похідні від кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \ddot{x}_1, \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \ddot{x}_2, \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0. \quad (5.50)$$

Складемо рівняння Лагранжа за допомогою результатів (5.45)...(5.50):

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= cx_2 - cx_1 - cl_0; \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -cx_2 + cx_1 + cl_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

У рівняннях (5.51) зробимо зміну:  $x_2 = y + l$ .

Тоді:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + cx - cy &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + cy - cx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Вирішення цієї системи знаходимо у формі:

$$x_1 = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t}.$$

Тоді отримаємо таку алгебраїчну систему рівнянь:

$$\begin{cases} (m_1 \lambda^2 + c)A - cB = 0, \\ cA + (c + m_2 \lambda^2)B = 0, \end{cases}$$

для якої характеристичне рівняння має вигляд:



$$m_1 m_2 \lambda^4 + (m_1 + m_2) c \lambda^2 = 0.$$

Звідси:

$$\lambda^2 = 0; \quad \lambda^2 = -\frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}.$$

Кратному кореню  $\lambda_{1,2} = 0$  відповідають часткові рішення:

$$x_1 = a_1 + bt; \quad x_2 = a_2 + bt. \quad (5.53)$$

Підставимо рішення (5.53) в диференціальне рівняння (5.52), отримаємо:

$$a_1 = a_2 = c_1; \quad b_1 = b_2 = c_2,$$

де  $c_1$  і  $c_2$  – деякі сталі. Комплексним кореням –

$$\lambda_{3,4} = \pm ik,$$

де

$$k = \sqrt{\frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}},$$

відповідають часткові рішення:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_3 \sin kt + b_3 \cos kt; \\ y &= a_4 \sin kt + b_4 \cos kt. \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

Підставимо часткові рішення (5.54) в диференціальні рівняння (5.54) і, прирівнявши коефіцієнти при  $\sin kt$  і  $\cos kt$ , отримаємо:

$$a_4 = \frac{m_1}{m_2} a_3; b_4 = -\frac{m_1}{m_2} b_3.$$

Позначивши  $a_3 \rightarrow c_3$  і  $b_3 \rightarrow c_4$ , отримаємо загальне рішення початкової системи диференціальних рівнянь. Урахуємо при цьому, що  $x_2 = y - l_0$ :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= c_1 + c_2 t + c_3 \sin kt + c_4 \cos kt; \\ x_2 &= l_0 + c_1 + c_2 t - \frac{m_1}{m_2} (c_3 \sin kt + c_4 \cos kt). \end{aligned} \right\} (5.55)$$

Використовуючи початкові умови,

$$t = t_0 = 0; x_1 = 0; x_2 = l; \dot{x}_1 = u_0; \dot{x}_2 = 0.$$

За допомогою рівнянь (5.55) отримаємо систему рівнянь для визначення сталих  $c_1, c_2, c_3, c_4$ :

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_4; \\ u_0 = c_2 + kc_3; \\ l_0 = l_0 + c - \frac{m_1}{m_2} c_4; \\ 0 = c_2 - \frac{m_1}{m_2} kc_3. \end{cases}$$

З цього випливає:

$$\left. \begin{aligned} c_1 = 0; c_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_0; \\ c_3 = \frac{u_0}{k} \frac{m_2}{m_1 + m_2}; c_4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

Підставимо результати (5.56) в рівняння (5.55). Тоді загальне рішення набуде вигляду:

$$x_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_0 t - \frac{u_0}{k} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \operatorname{sinkt};$$

$$x_2 = l_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_0 t - \frac{u_0}{k} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \operatorname{sinkt}.$$

Після скорочення:

$$x_1 = \frac{m_1 u_0}{m_1 + m_2} \left( t + \frac{m_2}{m_1 k} \operatorname{sinkt} \right);$$

$$x_2 = l_0 + \frac{m_1 u_0}{m_1 + m_2} \left( t - \frac{1}{k} \operatorname{sinkt} \right).$$

### Приклад 5.7

Розглянемо еліптичний маятник, що складається з тіла  $I$ , що переміщується без тертя горизонтальною прямою, і маятника  $II$ , підвішеного

до тіла  $I$  (рис. 5.8). Маса тіла  $I$  дорівнює  $m_1$ , маса маятника –  $m_2$ , момент інерції маятника щодо осі підвісу –  $I$ , відстань від центра ваги  $O_2$  маятника до осі підвісу –  $h$ . Скласти диференціальні рівняння руху еліптичного маятника, вважаючи кут відхилення маятника від вертикалі малим.

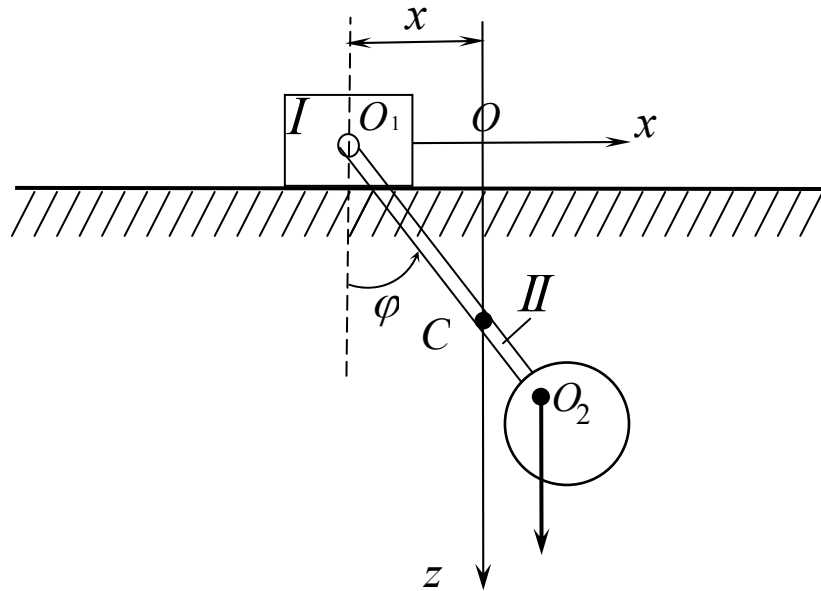


Рисунок 5.8

Система має два ступені вільності. За узагальненими координатами оберемо абсцису  $x$  тіла  $I$  і кут  $\varphi$  відхилення маятника від вертикалі. Кінетична енергія  $T$  системи складається із суми кінетичної енергії  $T_I$  і  $T_{II}$  тіл  $I$  і  $II$ :

$$T = T_I + T_{II}.$$

Тіло  $I$  рухається поступально, тому

$$T_I = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2.$$

Швидкість точки підвісу маятника дорівнює  $\dot{x}$ . Тоді кінетична енер-

гія тіла  $\Pi$  буде дорівнювати:

$$T_{\Pi} = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + m_2 h \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2.$$

Таким чином,

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 h \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2.$$

Потенційна енергія системи –

$$\Pi = -m_2 g h \cos \varphi.$$

Рівняння Лагранжа для даної системи мають такий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad L = T - \Pi.$$

Обчислимо відповідні величини:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 h \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 h \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 h \dot{\varphi}^2 \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I \dot{\varphi} + m_2 h \dot{x} \cos \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I \ddot{\varphi} - m_2 h \dot{\varphi} \dot{x} \sin \varphi + m_2 h \ddot{x} \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 h \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 h g \sin \varphi.$$

Запишемо шукані диференціальні рівняння руху механічної системи:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 h \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 h \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0, \\ I \ddot{\varphi} + m_2 h \ddot{x} \cos \varphi + m_2 h g \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

## 6 АНАЛОГІЇ ПРИ ВИКОРИСТАННІ РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА

Рівняння аналітичної механіки, завдяки аналогіям, виходять за межі класичної механіки і все більше використовуються у других наукових та інженерних розрахунках.

Так, завдяки аналогіям рівняння Лагранжа другого роду, наприклад, використовують в хімії і електродинаміці. Його також можливо приміняти і в інших галузях, якщо змоделювати процеси за законами математичних описів тієї чи іншої галузі з структурою відповідної формули класичної механіки.

Наведемо деякі приклади вирішення задач в електродинаміці за допомогою рівняння Лагранжа другого роду.

Розглянемо контур, в якому індуктивність  $L$ , омичний опір  $R$  і конденсатор ємності  $C$  з'єднані послідовно (рис. 6.1).

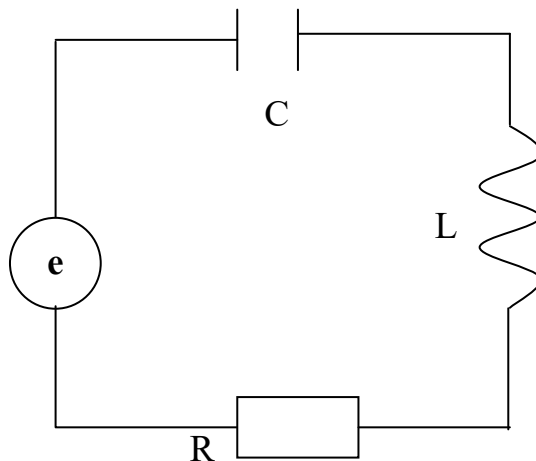


Рисунок 6.1

Для цих елементів зв'язок між напруженням  $U$  (різність потенціалу на кінцях) і величина струму  $i$  визначаються:

$$i = \frac{dq}{dt},$$

де  $q$  – заряд.

$$U = L \frac{di}{dt},$$

де  $U = Ri$ .

Крім того

$$U = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Якщо в контурі є зовнішнє джерело ЕДС –  $e(t)$ , то величина ЕДС дорівнює сумі напружень для окремих елементів.

Таким чином,

$$e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt$$

або

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (6.1)$$

Рівняння (6.1) є аналогом рівняння механічних коливань (6.2):

$$a \frac{d^2 q}{dt^2} + b \frac{dq}{dt} + cq = Q(t). \quad (6.2)$$

При цьому легко побачити, що індуктивність  $L$  відповідає загальній масі механічної системи, омичний опір – дисипативному коефіцієнту, наведений коефіцієнт жорсткості – коефіцієнту  $1/c$ , а заряд  $q$  – загальній координаті  $q$  механічної системи, загальна сила  $Q$  відповідає ЕДС  $e(t)$ .

Ясно, що є електричні системи, які мають однакові рівняння, являють собою дві різні електричні моделі однієї й тієї ж механічної системи.

Таким чином, можливо скласти наступну таблицю (табл.6.1).

Таблиця 6.1

Механічна система	a	b	c	Q	$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$	$R = \frac{1}{2} b \dot{q}^2$	$\Pi = \frac{1}{2} c q^2$
Електрична система	L	R	1/c	e	$\frac{1}{2} L \dot{q}^2$	$\frac{1}{2} R \dot{q}^2$	$\frac{1}{2c} q^2$

До таблиці 6.1 введені позначення:

$T$  – кінетична енергія механічної системи;

$R$  – функція Релея;

$\Pi$  – потенціальна енергія механічної системи.

### Приклад 6.1

На рисунку 6.2 зображений контур з паралельним з'єднанням елементів.



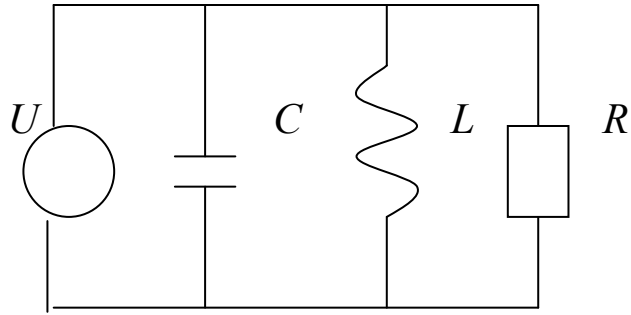


Рисунок 6.2

У цьому випадку:

$$\frac{U}{R} + \frac{1}{L} \int U dt + C \frac{dU}{dt} = i(t). \quad (6.3)$$

Здеференціюємо рівняння (6.3):

$$C \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{L} U = \frac{di}{dt}. \quad (6.4)$$

В одержаному рівнянні (6.4) отримані такі аналогії:

$$\begin{aligned} a &= c; & b &= 1/R; \\ c &= 1/L; & Q &= di/dt. \end{aligned}$$

### Приклад 6.2

Розглянемо більш складний приклад електричного кола (рис.6.3).

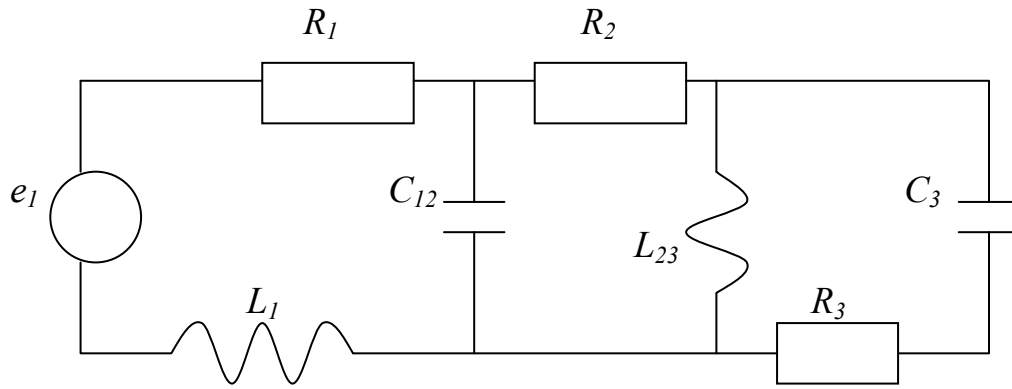


Рисунок 6.3

Складемо рівняння Лагранжа, враховуючи аналогії, наведені в таблиці 6.1:

$$T = \frac{1}{2} L_1 q_1^2 + \frac{1}{2} L_{23} (q_2 - q_3);$$

$$R = \frac{1}{2} R_1 q_1^2 + \frac{1}{2} R_2 q_2^2 + \frac{1}{2} R_3 q_3^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2C_3} q_3^2 + \frac{1}{2C_{12}} (q_1 - q_2)^2.$$

У даному випадку:

$$e_2 \equiv e_3 = 0;$$

$$e_1 = A \sin \Omega t.$$

Напишемо рівняння Лагранжа електричного кола:

$$L_1 q_1 + R_1 q_1 + \frac{1}{C_{12}} q_1 - \frac{1}{C_{12}} q_2 = A \sin \Omega t;$$

$$L_{23} q_2 - L_{23} q_3 + R = q_2 + \frac{1}{C_{12}} q_2 - \frac{1}{C_{12}} q_1 = 0;$$

$$L_{23} q_3 - L_{23} q_2 + R_3 q_2 + \frac{1}{C_3} q_3 = 0.$$

### Приклад 6.3

Якір електромагнітного датчика для запису коливань масою  $m$  опирається на дві пружини з коефіцієнтами жорсткості  $C$  і при вертикальних коливаннях основа датчика має вертикальні зсуви  $x = f(t)$  від положення, у якому пружини не деформовані. У наслідок зміни довжин повітряного зазору в магнітопроводі коефіцієнт самоіндукції котушки змінюється пропорційно вертикальному зсуву  $L = L(x)$ . Котушка включена в електричне коло, що складається з елемента із заданою електрорушійною силою  $e$  й омичним опором  $R$ .

Ґрунтуючись на рівняннях Лагранжа-Максвелла, скласти диференціальні рівняння руху якоря і току в електричному ланцюзі датчика (рис.6.4).

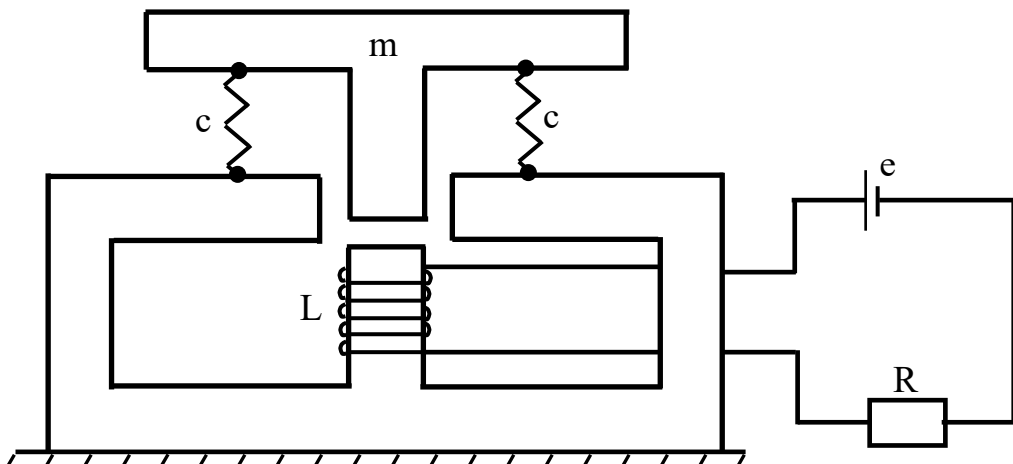


Рисунок 6.4

### Рішення

Візьмемо як узагальнені координати розглянутої електромеханічної системи з двома ступенями вільності зсув якоря  $x$  і заряд  $q$ , що відповідає току  $i$  в ланцюзі.

Обчислимо кінетичну і потенційну енергію системи.

$$T = T_m + T_e,$$

де

$$T_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2; \quad T_e = \frac{1}{2} L(x) \dot{q}^2;$$

$$\Pi = \Pi_m + \Pi_e,$$

де

$$\Pi_m = 2 \frac{cx^2}{2} - mgx; \quad \Pi_e = 0.$$

Таким чином,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) \dot{q}^2;$$

$$\Pi = cx^2 - mgx;$$

$$\Phi = \Phi_e = \frac{1}{2} Ri^2 = \frac{1}{2} R \dot{q}^2.$$

Узагальнені сили, що збуджують коливання:

$$Q_x^* = 0; \quad Q_q^* = e.$$

Для складання диференціальних рівнянь рухів якоря і струма в електричному ланцюзі датчика використовуємо рівняння Лагранжа-Максвелла, які відповідають узагальненим координатам:

– для координати  $x$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} + Q_x^*.$$

Тут

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x} \dot{q}^2;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 2cx - mg; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} = 0; \quad Q_x^* = 0.$$

Таким чином,

$$m\ddot{x} - \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial x} \dot{q}^2 + 2cx = mg.$$

Для координати  $q$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + Q_q^*.$$

Тут

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (L\dot{q}) = L\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x}\dot{q};$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \dot{q}} = R\dot{q}; \quad Q_q^* = e.$$

Таким чином,

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \dot{q}\dot{x} \frac{\partial L}{\partial x} = e.$$

#### Приклад 6.4

Грунтуючись на рівняннях Лагранжа-Максвелла, скласти диференціальні рівняння руху електромеханічної системи, яка являє собою конденсаторний мікрофон, що складається з послідовно з'єднаних котушки самоіндукції з коефіцієнтом самоіндукції  $L$  з омичним опором  $R$  і конденсатора, ємність якого в положенні рівноваги  $C_0$ . Пластини конденсатора зв'язані двома пружинами з коефіцієнтами жорсткості  $C$ . Маса рухомої пластини  $m$ , а відстань між пластинами в положенні рівноваги дорівнює  $a$  (рис. 6.5).

До складу розглянутого електричного ланцюга включений елемент із постійною електрорушійною силою  $e$ , а на рухливу пластину конденсатора діє перемінна сила  $P(t)$ .

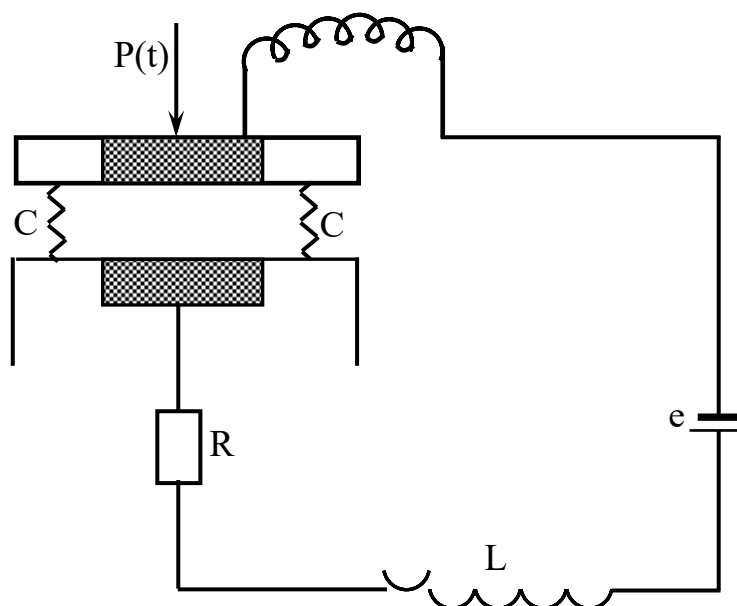


Рисунок 6.5

### Рішення

Для складання диференціальних рівнянь руху розглянутої електромеханічної системи використовуємо рівняння Лагранжа-Максвелла.

За узагальнені координати візьмемо зміну заряду конденсатора  $Q$  і зсув рухломої пластини з положення рівноваги  $X$ . Тоді повний заряд конденсатора дорівнює  $Q_0 + Q$ , а повна зміна довжини пружини –  $x_0 + x$ , де  $Q_0$  – заряд конденсатора, а  $x_0$  – зсув пластини від нейтрального положення в положення рівноваги системи.

Обчислимо кінетичну і потенційну енергію системи, функцію розсіювання й узагальнені сили:

$$T = T_M + T_e = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L \dot{q}^2;$$

$$\Pi = \Pi_M + \Pi_e = 2 \frac{1}{2} c (x + x_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{(q + q_0)^2 (a - x)}{C_0 a};$$

$$\Phi = \Phi_e = \frac{1}{2} R \dot{q}^2.$$

$$Q_x^* = P(t); \quad Q_q^* = e.$$

Рівняння Лагранжа-Максвелла для розглянутої електромеханічної системи мають вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x^*,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial \dot{q}} + Q_q^*.$$

Обчислюємо частинні похідні, які входять до першого рівняння Лагранжа-Максвелла:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 2c(x + x_0) - \frac{(q + q_0)^2}{2C_0 a}.$$

Підставивши ці значення в рівняння, одержуємо:

$$m\ddot{x} + 2c(x + x_0) - \frac{1}{2} \frac{(q + q_0)^2}{C_0 a} = P(t);$$

$$m\ddot{x} + 2cx + 2cx_0 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_0 a} - \frac{qq_0}{C_0 a} - \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_0 a} = P(t).$$

Тому що

$$2cx_0 = \frac{eq_0}{2a} \text{ та } q_0 = eC_0,$$

остаточно одержуємо

$$m\ddot{x} + 2cx - \frac{e}{a} q - \frac{q^2}{2C_0 a} = P(t).$$

Обчислюємо частинні похідні, що входять у друге рівняння Лагранжа-Максвелла:



$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = L\dot{q}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = L\ddot{q}; \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{(q + q_0)(a - x)}{C_0 a}; \quad \frac{\partial \Phi_e}{\partial \dot{q}} = R\dot{q}.$$

Підставляючи ці значення в друге рівняння Лагранжа-Максвелла, отримуємо:

$$L\ddot{q} + \frac{(q + q_0)(a - x)}{C_0 a} + R\dot{q} = e$$

або

$$L\ddot{q} + \frac{(q + eC_0)(a - x)}{C_0 a} - e + R\dot{q} = 0.$$

Остаточно:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{e}{a}x + \frac{q}{C_0} - \frac{qx}{aC_0} = 0.$$

## 7 ПРИНЦИП ГАМІЛЬТОНА

Розглянемо довільну голономну систему з незалежними координатами

$$q_1, q_2, \dots, q_n.$$

Мається на увазі, що на точки механічної системи не накладені диференціальні в'язи, що не інтегруються, тобто які записуються в кінцевому

вигляді.

Інтеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \quad (7.1)$$

зветься дією за Гамільтоном, де

$$L = T + U = T - \Pi. \quad (7.2)$$

Таким чином  $S$  характеризує співвідношення між кінетичною і потенціальною енергіями механічної системи при її русі. Друге співвідношення виходить із закону збереження механічної енергії для консервативної системи:

$$E = T + \Pi = \text{const.}$$

Вираз  $L dt$  у рівнянні (7.1) зветься елементарною дією за Гамільтоном.  $L$  відповідно формули (7.2) зветься функцією Лагранжа. Загальний математичний її запис є таким:

$$L = L(t, q_i, \dot{q}_i).$$

Звідки ясно, що для обчислення дії за Гамільтоном необхідно задати функції

$$q_i = q_i(t)$$

в інтервалі часу відповідно до формули (7.1):

$$t_0 \leq t \leq t_1.$$

Таким чином,  $S$  є функціонал, залежний від руху системи.  
 Якщо довільно задати функції

$$q_i = q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то отримаємо деякий кінематично можливий рух механічної системи.

Будемо розглядати всі можливі "шляхи", які проходять через задані точки (рис. 7.1):

$$M_0(t_0, q_i^0);$$

і

$$M_1(t_1, q_i^1).$$

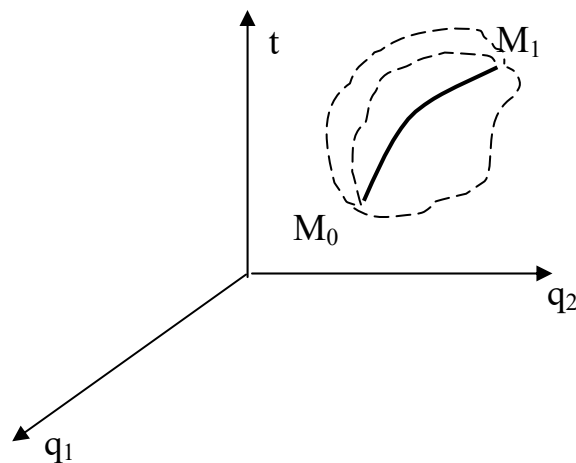


Рисунок 7.1

Свідомо фіксуються лише початковий і кінцевий моменти часу  $t_0$  і  $t_1$ . Останні рухи довільні.

Якщо система натуральна і невільна, то рухи, які розглядаються, підпорядковуються такому стведженню: при русі системи накладені на її точки в'язі не змінюються.

Нехай серед кількості "шляхів" є так званий "прямий шлях, тобто шлях, яким система може рухатися відповідно до заданої функції  $L$ . Для

цього шляху функція  $q_i(t)$  задовольняє рівнянню Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Усі останні шляхи, які проходять через точки  $M_0$  і  $M_1$ , будемо звати “непрямими”.

Дія  $S$  має для прямого шляху екстремальне у порівнянні з непрямыми шляхами значення. Це і є змістом принципу Гамільтона.

Якщо дію  $S_t$  записати у вигляді

$$S(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i(t, \alpha), \dot{q}_i(t, \alpha)) dt, \quad (7.3)$$

то її варіація має вигляд:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \end{aligned}$$

Тоді математичний вираз принципу Гамільтона записується так:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0.$$

Має місце і зворотнє твердження.

Якщо  $\delta S = 0$ , то вказаний шлях є прямим.

Диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

є необхідною і достатньою умовою для того, щоб  $\delta S = 0$ .

У варіаційному обчисленні ці рівняння зветься диференціальними рівняннями Ейлера для варіаційної задачі:

$$S \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \dot{q}_i) dt = 0.$$

Малий параметр  $\alpha$  у рівнянні (7.3) вводиться для того, щоб задати однопараметричне сімейство шляхів:

$$q_i = q_i(t, \alpha),$$

$$t_0 \leq t \leq t_1;$$

де  $\gamma \leq \alpha \leq \gamma; \quad (i = 1, 2, \dots, n).$

Це сімейство при  $\alpha = 0$  містить прямий шлях, а при  $\alpha \neq 0$  – не-прямі шляхи.

Розглянемо принцип Гамільтона на деяких прикладах.

### Приклад 7.1

Розглянемо рух невільної точки (рис. 7.2), яка вимушена рухатися вздовж сфери при відсутності силового поля (рух за інерцією).

Для простоти викладання візьмемо масу точки  $m = 1$ .

Розв'язування в сферичних координатах:

$$L = \frac{V^2}{2} = \frac{R^2}{2} (\dot{\varphi}^2 + \sin^2 \varphi \dot{\psi}^2).$$

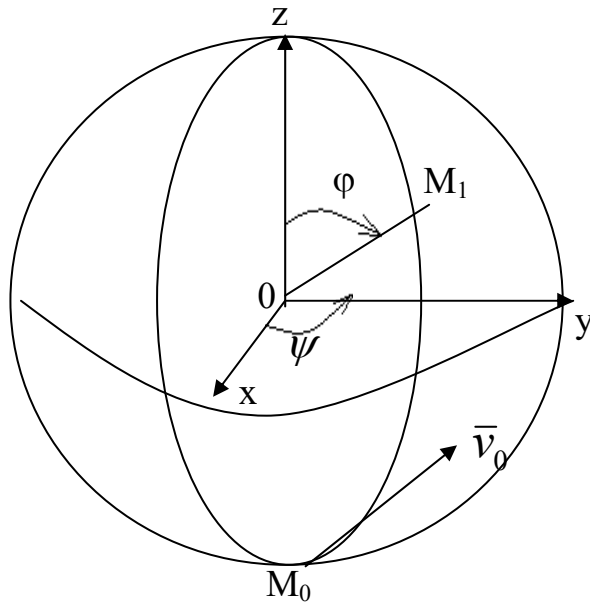


Рисунок 7.2

Для прямого шляху:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

і

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \text{const},$$

де  $\varphi$  – циклічна координата ( $dL/d\psi = 0$ ). Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned} \varphi - \sin\varphi (\cos\varphi) \psi^2 &= 0; \\ (\sin^2 \varphi) \psi &= (\sin^2 \varphi_0) \psi_0. \end{aligned}$$

Можливо вважати, що для прямого шляху початкова швидкість  $V_0$  напрямлена за меридіаном:

$$\psi = \text{const}, \psi_0 = 0.$$

Тоді  $\psi=0$ ;  $\dot{\phi} = \text{const}$  і  $V^2 = R^2 \dot{\phi}^2 = \text{const}$ .

Таким чином, прямий шлях являє собою рівномірний рух по дузі великого круга.

При цьому:

$$\begin{aligned} S_{ок} - S_{np.} &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (V^2 - V_0^2) dt = \\ &= V_0 \int_{t_0}^{t_1} (V - V_0) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (V - V_0) dt \geq V_0 \int_{t_0}^{t_1} (V - V_0) dt = \\ &= V_0 (G_{ок} - G_{np.}). \end{aligned}$$

Іншими словами:

$$S_{np} < S_{ок}.$$

### Приклад 7.2

Кінці струни закріплені в нерухомих точках  $A$  і  $B$ , відстань між якими дорівнює  $l$  (рис. 7.3). Враховуючи, що натяг  $T$  струни однаковий у всіх точках, визначити дію за Гамільтоном для малих коливань струни.

Вважаємо, що коливання діють в одній вертикальній площині  $XU$  і що на струну діє тільки сила натяжіння.

Лінійна щільність струни дорівнює  $\rho$ .

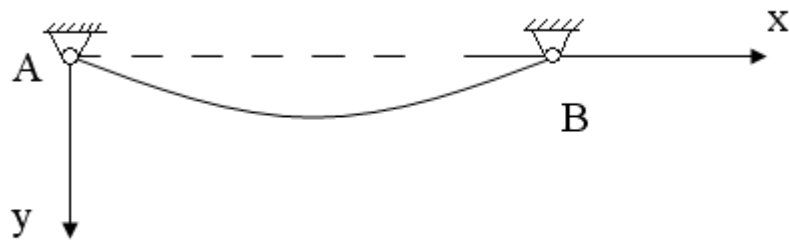


Рисунок 7.3

**Рішення**

Візьмемо за основу умову

$$\dot{x} = 0.$$

Тоді:  $y = y(x, t),$

$$T = \frac{1}{2} \rho \int V^2 dy, \quad V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2;$$

звідки

$$V^2 = \dot{y}^2.$$

Таким чином:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \dot{y}^2 dx;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} C \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx.$$



Тоді

$$\begin{aligned} L = T - \Pi &= \frac{1}{2} \left( \rho \int_0^l y^2 dx - C \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left( \rho \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - C \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Отже, дія за Гамільтоном набуде такого вигляду:

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l \left( \rho \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - C \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx.$$

### Приклад 7.3

Розрахувати дію за Гамільтоном для випадку вільного падіння точки масою  $m$  (рис. 7.4).

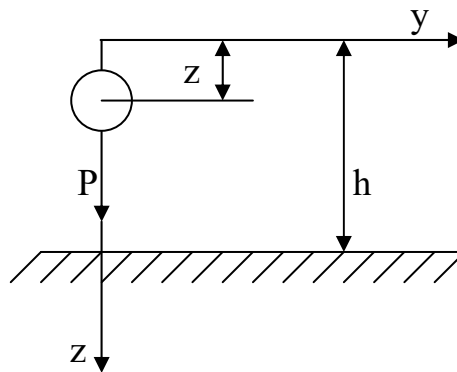


Рисунок 7.4

### Рішення

Вільне падіння матеріальної точки має закон:

$$x = 0, \quad y = 0,$$

$$z = \frac{gt^2}{2}. \quad T = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\Pi = -mgz.$$

Тоді 
$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}mg^2t + mg^2t = \frac{3}{2}mg^2t,$$

де 
$$x = 0, y = 0, z = gt.$$

Остаточно маємо:

$$L = \frac{1}{2}mz^2 + mg^2t = \frac{1}{2}mg^2t + mg^2t = \frac{3}{2}mg^2t.$$

Легко з'ясувати, що

$$t_0 = 0; t_1 = \sqrt{2h/g}.$$

Тоді

$$S = \int_0^{\sqrt{2h/g}} L dt = \int_0^{\sqrt{2h/g}} \frac{3}{2}mg^2t dt = \frac{3}{2}mg^2 \frac{t^2}{2} = \frac{3}{2}m \frac{h}{g}.$$

#### Приклад 7.4

Вивести диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухокої осі.

### Рішення

Залишимо принцип Гамільтона у такому виразі:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0.$$

Як загальну координату оберемо кут оберту тіла  $\varphi$ .

Тоді

$$\delta A = \sum_i^n m_z (\bar{F}_i^a) \delta \varphi.$$

Крім того

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2,$$

відкіля

$$\delta T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} = I_z \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi}.$$

Крім того

$$\frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \delta \varphi) = \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt} \delta \varphi = \delta \dot{\varphi}.$$

Тоді

$$\delta T = \frac{d}{dt}(I_z \dot{\varphi} \delta\varphi) - I_z \ddot{\varphi} \delta\varphi.$$

Використаємо принцип Гамільтона:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{d}{dt} I_z \dot{\varphi} \delta\varphi - I_z \dot{\varphi} \delta\varphi + \sum_i^n m_z (\bar{F}_i^a) \delta\varphi \right) dt = 0;$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (m_z (\bar{F}_i^a) I_z \dot{\varphi}) \delta\varphi dt + \int_{t_0}^{t_1} d(I_z \dot{\varphi} \delta\varphi) = 0. \quad (7.4)$$

Другий інтеграл в формулі (7.4) обертається в нуль:

$$\int_{t_0}^{t_1} d(I_z \dot{\varphi} \delta\varphi) = I_z \dot{\varphi} \delta\varphi \Big|_{t_0}^{t_1},$$

так як, при  $t = t_0$  і  $t = t_1$   $\delta\varphi = 0$ .

З цього випливає

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_i^n m_z (\bar{F}_i^a) - I_z \ddot{\varphi} \right) \delta\varphi dt = 0.$$

Відповідно основній лемі варіаційного обчислення, остаточно маємо:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_i^n m_z (\bar{F}_i^a).$$